



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Computación Científica

Implementación computacional en Freefem++ de una ecuación de onda con término disipativo no lineal

TESIS

**Para optar el Título Profesional de Licenciada en Computación
Científica**

AUTOR

Lila Lisbeth TENORIO PAREDES

ASESOR

José Raúl LUYO SÁNCHEZ

Lima, Perú

2018

IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL EN FREEFEM++ DE UNA ECUACIÓN DE ONDA CON TÉRMINO DISIPATIVO NO LINEAL

Lila Lisbeth Tenorio Paredes

Asesor: Dr. José Raúl Luyo Sánchez

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciada en Computación Científica

Aprobada por:



Mg. Luis Javier Vásquez Serpa
Presidente del jurado



Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas
Miembro del Jurado



Dr. José Raúl Luyo Sánchez
Miembro Asesor

Lima - Perú
Noviembre 2018

Ficha Catalográfica

TENORIO PAREDES, LILA LISBETH

IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL
EN FREEFEM++ DE UNA ECUACIÓN DE ONDA CON
TÉRMINO DISIPATIVO NO LINEAL

Lima: UNMSM, 2018.

VIII, 75p; 29,7 cm (UNMSM, Licenciada,
Computación Científica, 2018).

Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos,
Facultad de Ciencias Matemáticas.

1. Computación Científica I. UNMSM/FCM

II. Título (Serie).

RESUMEN

IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL EN FREEFEM++ DE UNA ECUACIÓN DE ONDA CON TÉRMINO DISIPATIVO NO LINEAL

Lila Lisbeth Tenorio Paredes

Noviembre 2018

Asesor: Dr. José Raúl Luyo Sánchez.

Título obtenido: Licenciada en Computación Científica.

El objetivo de este trabajo es utilizar el software Freefem++ para resolver numéricamente la ecuación de ondas con término disipativo no lineal que describe la vibración de una membrana. Primeramente, estudiamos la teoría de semigrupos con la finalidad de garantizar la existencia y unicidad de soluciones fuertes para este problema. La implementación computacional es realizada en FreeFem++ que es un software libre escrito en C++ y basado en el Método de Elementos Finitos (MEF). Finalmente, mostramos los resultados de las simulaciones donde se consideró el término de disipación igual al arco-tangente y se obtuvieron las gráficas de las soluciones numéricas del problema mediante Gnuplot.

Palabras Clave: Semigrupos, FreeFem++, EDP's, Método de los Elementos Finitos(MEF).

ABSTRACT

COMPUTATIONAL IMPLEMENTATION OF A WAVE EQUATION WITH NONLINEAR DISSIPATIVE TERM USING FREEFEM++

Lila Lisbeth Tenorio Paredes

November 2018

Advisor: José Raúl Luyo Sánchez, Phd.

Obtained Title: Degree in Scientific Computing.

The objective of this work is to use the Freefem ++ software to model the vibration of a membrane described by the equation of waves with non-linear dissipative term. First, we study the theory of semigroups in order to guarantee the existence and uniqueness of strong solutions for this problem. The computational implementation is done in FreeFem ++ which is a free software written in C ++ and based on the Finite Element Method (FEM). Finally, we show the results of the simulations where the dissipation term was considered equal to the arctangent and the graphs of the numerical solutions of the problem were obtained by means of Gnuplot.

Keywords: Semigroups, FreeFem++, PDE's, Finite Element Method(FEM).

Agradecimientos

Primero doy gracias a Dios por darme la fortaleza para continuar con mis sueños.

A mi asesor Dr. José Raúl Luyo Sánchez, por toda sus enseñanzas, paciencia y la constante motivación para mi desarrollo profesional.

A la profesora Dra. Roxana López Cruz por compartir sus experiencias.

Al profesor Dr. Oliver Pironeau por brindarme ayuda para el desarrollo de la tesis.

Al profesor Dr. Pedro Celso Chamorro Contreras por las sugerencias y correcciones a la redacción de la tesis.

A mis padres y mi hermana, Venancio, Bertha y Violeta por todo el amor, cariño y apoyo para continuar con mi crecimiento profesional.

A mi novio Jonathan, por la paciencia, motivación y todo el apoyo a lo largo de este tiempo.

A mis amigos Rocío, Isabel, Paola, Vanesa, Richard, Jhelly, Alan, Karen, Gigi por los lindos momentos que compartimos en las salas de estudios de la UNMSM.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	5
1.1. Notación	5
1.2. Espacio de las distribuciones	6
1.3. Espacios $L^p(\Omega)$	8
1.4. Espacios de Sobolev	8
1.5. Espacios funcionales	9
1.6. Resultados Importantes	10
1.7. Semigrupos de operadores lineales acotados	12
1.8. Problema de Cauchy no homogéneo	16
1.9. Problema de Cauchy semilineal	18
1.10. Diferencias finitas	22
2. Existencia, unicidad y regularidad de las soluciones mediante semigrupos	25
3. Decaimiento exponencial de las soluciones	32
4. Implementación computacional de la cuerda vibrante en FreeFem++	36
4.1. El software FreeFem++	36
4.2. Método de diferencias finitas	38
4.3. Método de diferencias finitas	40
4.4. La Solución Numérica mediante FreeFem++	44
4.4.1. Gráficas mediante Gnuplot	47
4.5. Resultados Numéricos	49

5. Implementación computacional de la membrana vibrante en FreeFem++	51
5.1. Formulación variacional	51
5.2. Método de los elementos finitos	53
5.3. Formulación variacional discreta	58
5.4. La Solución numérica mediante FreeFem++	58
5.4.1. Gráficas mediante Gnuplot	63
5.5. Resultados numéricos	65
Apéndice	69
Bibliografía	72

Introducción

El movimiento de ondas ocurre en una gran variedad de situaciones físicas tales como vibración de cuerdas, membranas (tambor), ondas que viajan a través de una barra sólida, ondas que viajan a través de medios sólidos (terremotos), ondas acústicas, ondas de agua, ondas de presión (ondas de choque), radiación electromagnética, rayos vibratorios, etc [32].

El estudio del movimiento de una membrana con bordes fijos constituye un problema clásico y antiguo. En el mundo real, encontramos diversas aplicaciones en física e ingeniería sobre el modelamiento de dicha membrana tales como el diafragma de un micrófono y la superficie del tambor. En este trabajo estudiaremos el modelo que describe las vibraciones transversales de una membrana en la región $[0, 1] \times [0, 1]$ con bordes fijos y sujeta a fuerzas de disipación externas no lineales $g(u_t)$. El desplazamiento de la membrana $u(x, y, t)$ en el punto (x, y) en el instante t , satisface la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + g(u_t) = 0, & (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), t \geq 0 \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y); u_t(x, 0) = u_1(x, y) & (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ u(x, y, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

donde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es globalmente Lipschitz y $g(s)s \geq 0$, para todo $s \geq 0$. Varias formas de g en (1) aparecen en diferentes contextos [34]. Por ejemplo, si $g(u_t) = u_t$ es conocida como la ecuación del telegrafista. De forma general, si $g(u_t) = au_t + bu_t^3$ entonces la ecuación proporciona un modelo básico para una membrana vibrante con una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad u_t .

La energía asociada al modelo (1) es dada por:

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |u_t(x, t)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx \right), \quad (2)$$

la cual demostraremos que decae exponencialmente y así garantizar la estabilidad del problema (1).

Las ecuaciones de onda con término disipativo no lineal fueron investigadas por varios autores: Ang [2] muestra la existencia y unicidad de la solución para la función

$g(u_t) = |u_t|^\alpha \text{sgn}(u_t)$, con $\alpha \in (0, 1)$. Varbu [5], Haraux [18], Kopackova [24] y Luyo [25] prueban la existencia y unicidad global del problema (1). Haraux [18] obtiene las soluciones clásicas de ecuaciones hiperbólicas semilineales mediante la teoría de semigrupos. Mientras que, Luyo [25] emplea el método de Faedo- Galerkin.

En este trabajo la ecuación (1) es reformulada como una ecuación de primer orden en la variable temporal con la finalidad de utilizar la teoría de semigrupos de operadores lineales. Así obtenemos el problema de Cauchy semilineal:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt}(t) = AU + G(U) \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (3)$$

donde $U = (u, u_t)$, A un operador lineal, G es una función no lineal globalmente Lipschitz y $U_0 = (u_0, u_1)$ el valor inicial.

Con la finalidad de garantizar la existencia y unicidad del problema (3), buscaremos obtener las condiciones necesarias y suficientes para que el operador lineal A sea un generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo de contracciones en un espacio de Banach H .

Para las simulaciones numéricas de la ecuación (1) utilizaremos FreeFem++, el cual fue desarrollado por Oliver Pironneau y Hecht [20], es un software libre que permite resolver numéricamente ecuaciones diferenciales parciales mediante el método de los elementos finitos. Este software resulta muy didáctico para poder estudiar debido a que tiene un lenguaje de programación de alto nivel, basado en la formulación variacional de la ecuación diferencial parcial. FreeFem++ puede resolver diversos problemas tales como: problemas elípticos, parabólicos e hiperbólicos, fluidos Navier-Stokes, fluidos, elasticidad, interacción de la estructura del fluido, método de descomposición del dominio de Schwarz, problema de autovalor, error de indicador residual, etc. Además, podemos encontrar una gran cantidad de ejemplos en el tutorial Hecht et al. [20].

El objetivo de este trabajo de tesis es analizar y visualizar el comportamiento del desplazamiento de la membrana a lo largo del tiempo tanto analítica y numéricamente. En una primera etapa estudiaremos resultados que garantizan la existencia y unicidad de las soluciones fuertes del modelo mediante la teoría de semigrupos. En relación a la parte numérica, estudiaremos los fundamentos teóricos del método de los elementos finitos, aprenderemos y detallaremos paso a paso los comandos propios del software FreeFem++ para la resolución de nuestro problema. Finalmente para la visualización de nuestros datos empleamos Gnuplot.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 1, definimos los espacios funcionales y mostramos resultados preliminares para la ecuación de ondas con término de disipación no lineal. También, introducimos la teoría de semigrupos y ecuación de evolución semilineal, el primero que representa una importante herramienta en el estudio de las ecuaciones de evolución [29]. Finalmente, presentamos los teoremas necesarios para probar la existencia y unicidad del modelo.

En el capítulo 2, demostramos que el problema puede ser descrita como un problema de Cauchy semilineal (3), el operador A genera un C_0 -semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Mediante la teoría de semigrupos para operadores lineales, demostraremos que tiene una única solución fuerte que depende de los datos iniciales, esto mediante el teorema de Lummer-Phillips [42] y los resultados encontrados en Zheng [43].

En el capítulo 3, mostramos que las soluciones decaen exponencialmente utilizando el método de la Energía [28]. Definimos un funcional de Lyapunov, equivalente al funcional de la energía $E(t)$, y luego mostramos el resultado pretendido.

En el capítulo 4, presentamos los resultados obtenidos de la implementación computacional de la cuerda vibrante con extremos fijos. Mostramos una breve introducción del programa FreeFem++ desarrollado por F.Hecht y O.Pironneau [30]. Este software fue elegido para realizar las simulaciones numéricas y está basada en el método de los elementos finitos. Para el caso unidimensional utilizamos FreeFem++ como código C++, debido a que este lenguaje es basado en C++. Describimos brevemente el método de diferencias finitas [40]. Luego, damos una explicación detallada del programa en FreeFem++. Además explicaremos como se obtuvieron las gráficas mediante Gnuplot. Finalmente, mostramos los gráficos del desplazamiento de la cuerda.

En el capítulo 5, realizamos la simulación numérica para la membrana vibrante sujeta a un marco cuadrado fijo en la frontera. Encontramos la formulación variacional del modelo. Luego, estudiamos el método de los elementos finitos(MEF) [30], que es utilizado para aproximar la solución de nuestro problema. Seguidamente, mostramos la formulación variacional discreta debido a que la sintaxis de FreeFem++ solo permite ingresar ecuaciones discretizadas. Posteriormente, explicamos detalladamente línea por línea de código realizado en FreeFem++ y mostramos los gráficos obtenidos para la solución aproximada.

Finalmente presentamos las conclusiones obtenidas del trabajo. En el Apéndice mostramos un pequeño tutorial para el programa Gnuplot, el cual es una herramienta necesaria para visualizar los gráficos en 2 y 3 dimensiones.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentaremos la terminología y los principales resultados matemáticos que serán de gran utilidad en los siguientes capítulos del trabajo.

1.1. Notación

En este trabajo vamos a seguir la notación usual de la teoría de Ecuaciones Diferenciales Parciales:

1. \mathbb{R} representa los números reales.
2. \mathbb{R}_+ representa los números reales no negativos.
3. \mathbb{N}^n representa el conjunto de los vectores con n-entradas de números naturales.
4. \mathbb{P}^1 , representa el conjunto de los polinomios de grado 1.
5. $C^n(\Omega)$ - funciones n continuamente diferenciable en un conjunto abierto Ω .
6. $\bar{\Omega}$, clausura del conjunto Ω .
7. $R(A)$, rango del operador A .
8. $D(A)$, dominio del operador A .
9. $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, para $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ y $n \in \mathbb{N}$.
10. $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, representa el operador derivación de orden $|\alpha|$ donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

11. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable entonces el gradiente de f , denotado por ∇f , es un vector en \mathbb{R}^n

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right).$$

12. El laplaciano de la función f es de la forma

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}.$$

13. u_t , derivada parcial de u respecto a t .
14. u_{xx} , derivada parcial de segundo orden u respecto a x .
15. $O((\Delta t)^n)$, error de orden n en la variable t .

1.2. Espacio de las distribuciones

Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^n , con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ suficientemente regular.

Definición 1.2.1. Dada una función continua $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ definimos el soporte de φ , denotado por $\text{supp}(\varphi)$, como la clausura en Ω del conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$, lo denotamos por

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}.$$

El soporte de φ es el menor conjunto relativamente cerrado, fuera del cual φ es idénticamente cero. Si este conjunto es compacto en \mathbb{R}^n , entonces φ tiene soporte compacto.

Definición 1.2.2. Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ el espacio de las funciones $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, que son infinitamente diferenciables y tienen soporte compacto en Ω . Los elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ son denominados funciones de prueba.

En el siguiente ejemplo mostramos una función de prueba.

Ejemplo 1.2.1. Sea $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp(-1/(1 - \|x\|_2^2)), & \text{si } \|x\|_2 < 1 \\ 0, & \text{si } \|x\|_2 \geq 1. \end{cases}$$

Se verifica que $\rho \in C_0^\infty(\Omega)$ y $\text{supp}(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_2 \leq 1\}$, donde $\|\cdot\|_2$ denota la norma euclidiana.

Definición 1.2.3. Una sucesión $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ converge a $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, si existe un subconjunto compacto K de Ω tal que se verifican las siguientes condiciones:

1. $\text{supp}(\varphi_k) \subset K$, para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\text{supp}(\varphi) \subset K$.
2. Para cada multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi_k \rightarrow D^\alpha \varphi$, uniformemente sobre K .

Definición 1.2.4. El espacio vectorial $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ provisto de la convergencia anterior es llamado espacio de las funciones de prueba y denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Generalizamos el concepto de funciones definidas en Ω , introduciendo el concepto de Distribuciones.

Definición 1.2.5. Una distribución $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación lineal y continua en relación a la noción de convergencia definida en $\mathcal{D}(\Omega)$. El conjunto de todas las distribuciones sobre Ω es denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dados $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, denotaremos por $\langle T, \varphi \rangle$ el valor de T aplicado en φ . El espacio de las distribuciones es provisto de la siguiente noción de convergencia

Definición 1.2.6. Sea una sucesión $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ y sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Decimos que T_k converge a T en $\mathcal{D}'(\Omega)$ y denotamos por $T_k \rightarrow T$, si

$$\langle T_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Ejemplo 1.2.2 (La distribución de Dirac). Sea $x \in \Omega$. Definimos la función $\delta_x : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue

$$\langle \delta_x, \varphi \rangle = \varphi(x), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Se tiene que $\delta_x \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Además δ_x es una distribución no nula, pues existe $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\langle \delta_x, \varphi \rangle = \varphi(x) = 1$.

Definición 1.2.7. Sean $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$. La derivada de T de orden α , denotada por $D^\alpha T$, es definida por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

$D^\alpha T$ es llamada derivada distribucional de T .

Con esta definición tenemos que si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, entonces podemos determinar su derivada distribucional $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

En este trabajo decimos que dos funciones f y g son iguales en el sentido de las distribuciones si verifican la siguiente igualdad

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

1.3. Espacios $L^p(\Omega)$

Sea Ω un conjunto abierto y $1 \leq p \leq \infty$, denotamos por $L^p(\Omega)$ al espacio de Banach definido por

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, u \text{ medible}, \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty\}$$

provisto de la norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|, \quad \text{si } p = +\infty.$$

En el caso particular $p = 2$, se tiene que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, asociado al producto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad u, v \in L^2(\Omega).$$

El espacio $L^p(\Omega)$ está formado por clases de funciones, donde dos funciones están en la misma clase si son iguales excepto en un conjunto de medida nula en Ω .

Teorema 1.3.1 (Densidad). *El conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Ver Brezis [9] página 97. □

1.4. Espacios de Sobolev

Definición 1.4.1. *Sea $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p \leq \infty$. Definimos el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ como:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}$$

siendo $D^\alpha u$ la derivada de u en el sentido de las distribuciones. El Espacio $W^{m,p}(\Omega)$ es llamado el Espacio de Sobolev de orden m relativo al espacio $L^p(\Omega)$.

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$, definimos la norma $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ como

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p dx \right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty$$

y

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{si } p = \infty.$$

Para $p = 2$, denotamos $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$. Este es un espacio de Hilbert con producto interno y norma dados respectivamente por:

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha} u(x) D^{\alpha} v(x) dx$$

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \|D^{\alpha} u\|_{L^2(\Omega)}^2 dx \right)^{1/2}.$$

El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ posee las siguientes propiedades ver Kezavan [23] página 53:

1. Para $1 \leq p \leq \infty$, el espacio $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ es un espacio de Banach.
3. Si $1 < p < \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ es reflexivo y si $1 \leq p \leq \infty$ es separable.
2. En particular $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert es reflexivo y separable.

Siendo $\Gamma = \partial\Omega$ regular, se demuestra que $H_0^m(\Omega)$ es constituido por las funciones de $H^m(\Omega)$ tales que las trazas de las funciones y de todas las derivadas de todos los órdenes menores a m son nulas en Γ , ver Kezavan [23] página 101.

Definición 1.4.2. Sea $1 \leq p < \infty$, denotamos por $W_0^{m,p}(\Omega)$ la cerradura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$,

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}}.$$

1.5. Espacios funcionales

Sea X un espacio de Banach. Se denota por $\mathcal{L}(X)$ el espacio de Banach de todas las funciones lineales y limitadas en X dotado de la norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup\{\|Tx\|_X : \|x\|_X \leq 1\}.$$

Para cualquier $T > 0$ denotamos por $C([0, T]; X)$ el espacio de las funciones vectoriales continuas

$$C([0, T]; X) = \{u : [0, T] \rightarrow X, u \text{ es continua en } [0, T]\},$$

dotado de la norma

$$\|u\|_{C([0,T];X)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X.$$

Este espacio $C([0, T]; X)$ es un espacio de Banach.

Definimos por $C([0, \infty); X)$ al espacio de las funciones continuas y limitadas

$$C([0, \infty); X) = \{u : [0, \infty) \rightarrow X, u \text{ es continua y limitada en } [0, \infty).\}$$

Este espacio está dotado de la norma definida por:

$$\|u\|_{C([0, \infty); X)} = \sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_X.$$

Así, $C([0, \infty); X)$ es un espacio de Banach.

1.6. Resultados Importantes

En esta sección serán enunciados los lemas y teoremas que serán utilizados en los capítulos siguientes.

Teorema 1.6.1 (Desigualdad de Young). *Sean $a, b \geq 0$ y $1 < p, q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Teorema 1.6.2 (Desigualdad de Hölder). *Considere $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$ con $1 < p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, o $p = 1$ y $q = \infty$ o $p = \infty$ y $q = 1$. Entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demostración. Ver Brézis [9], página 92. □

Corolario 1.6.1 (Desigualdad de Cauchy-Bunyakovski-Schwarz). *Sean $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\Omega)$, entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y*

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demostración. Ver Brézis [9], página 92. □

Lema 1.6.1 (Desigualdad de Gronwall). *Sea $\alpha \in L^1([0, T])$, $\alpha \geq 0$, $w \in C([0, T])$, $w \geq 0$ y $C > 0$. Si $w(t) \leq C + \int_0^t \alpha(s)w(s)ds$, para todo $t \in [0, T]$, entonces se tiene*

$$w(t) \leq Ce^{\int_0^t \alpha(s)ds}, \forall t \in [0, T].$$

Demostración. Ver Gronwall [8]. □

Teorema 1.6.3 (Desigualdad de Poincaré-Friedrich). *Sea Ω un conjunto acotado de \mathbb{R}^n , entonces existe un número positivo $C = C(\Omega)$ tal que para todo $\phi \in H_0^1(\Omega)$*

$$\int_{\Omega} |\phi(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla \phi(x)|^2 dx.$$

Demostración. Ver Brezis [9] página 290 o Kezavan [23] página 70. □

Teorema 1.6.4 (Agmon–Douglis–Nirenberg). *Sea Ω un abierto de clase C^2 con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ limitada. Sea $1 < p < \infty$. Entonces para todo $f \in L^p(\Omega)$ existe una única solución $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ de la ecuación*

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega.$$

Adicionalmente, si Ω es de clase C^{m+2} y $f \in W^{m,p}(\Omega)$ ($m \geq 1$ un entero), entonces

$$u \in W^{m+2,p}(\Omega) \quad \text{y} \quad \|u\|_{W^{m+2,p}} \leq C \|f\|_{W^{m,p}}.$$

Demostración. Ver Brézis [9] página 326. □

Teorema 1.6.5 (Teorema de Green). *Sea Ω un abierto de clase C^1 . Si $u \in H^2(\Omega)$ y $v \in H^1(\Omega)$, entonces se tiene*

$$\int_{\Omega} (\Delta u) v dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) v d\sigma.$$

Demostración. Ver Kezavan [23] página 102. □

Definición 1.6.1. *Sea H un espacio de Hilbert con norma $\|\cdot\|_H$. Un operador*

$$a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

es conocido como forma bilineal si $a(\cdot, v)$ es lineal para cada $v \in H$ y $a(u, \cdot)$ es lineal para cada $u \in H$. El operador a es acotado (continuo) si existe una constante $C > 0$ tal que

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H.$$

El operador a es coercivo si existe una constante $\beta > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq \beta \|v\|^2 \quad \forall v \in H. \tag{1.1}$$

Teorema 1.6.6 (Teorema de Lax-Milgram). *Sea $a(u, v)$ una forma bilineal limitada y coerciva en un espacio de Hilbert H . Entonces para cada funcional lineal acotado φ en H , existe un único $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = \varphi(v), \quad \forall v \in H.$$

Demostración. Ver Brezis [9] página 140. □

Teorema 1.6.7 (Teorema del punto fijo de Banach). *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow X$ una contracción, es decir, existe $\alpha \in [0, 1)$ tal que*

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Entonces, T posee un único punto fijo $x_0 \in X$, es decir, $T(x_0) = x_0$.

Demostración. Ver Brezis [9] página 138. □

1.7. Semigrupos de operadores lineales acotados

El concepto de semigrupos de operadores lineales acotados tiene su origen en la importante observación sobre la ecuación funcional de Cauchy [10]. La cual consiste en determinar la función $f(x)$ continua en un intervalo arbitrario de la variable x , y que para todo x, y satisface

$$f(x + y) = f(x)f(y).$$

Reescribimos el problema descrito por Cauchy como sigue: Encuentre todas las funciones continuas $S(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} S(t + s) = S(t) \circ S(s), & \forall t, s \geq 0 \\ S(0) = 1 \end{cases} \quad (1.2)$$

Según encontramos en la literatura, las funciones de la forma $S(t) = e^{ta}$ para todo $a \in \mathbb{R}$ son las únicas funciones continuas que verifican (1.2).

Es importante tener en cuenta que (1.2) no es solamente una igualdad formal, sino que además adquiere un significado en la descripción de un sistema dinámico. Si identificamos \mathbb{R} con el espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ de todos los operadores lineales de \mathbb{R} en \mathbb{R} , notamos que $S(\cdot)$ verificando (1.2) describe la evolución en el tiempo (para todo $t \geq 0$) de un sistema dinámico lineal en \mathbb{R} . Más precisamente, si $x_0 \in \mathbb{R}$ es el estado de nuestro sistema en $t = 0$, entonces

$$x(t) = S(t)x_0,$$

es el estado para $t \geq 0$. También a partir de (1.2) podemos concluir que

$$x(t + s) = S(t + s)x_0 = S(t)S(s)x_0 = S(t)S(s)x_0,$$

es decir, el estado $x(t + s)$ en el tiempo $t + s$ es el estado en el tiempo t comenzando de $x(s)$.

A continuación pasaremos a una expresión más general y consideramos el espacio vectorial finito dimensional $X = \mathbb{R}^n$. El espacio $\mathcal{L}(X)$ de todos los operadores lineales de X en X es identificado con el espacio $M_n(\mathbb{R})$ todas las matrices de orden $n \times n$ y un sistema lineal dinámico en X será dado por una función de valor matricial

$$S(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow M_n(\mathbb{R})$$

que satisface la ecuación funcional

$$\begin{cases} S(t+s) = S(t)S(s), & \forall t, s \geq 0, \\ S(0) = I. \end{cases} \quad (1.3)$$

De manera análoga a la parte anterior los candidatos a soluciones de (1.3) son funciones exponenciales las cuales fueron definidas por G. Peano en 1887:

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}, \quad (1.4)$$

donde $A^0 = I$, denota la matriz identidad. Tomando la norma en \mathbb{R}^n y la correspondiente norma matricial en $M_n(\mathbb{R})$, se muestra que la suma parcial de la suma arriba definida forma una sucesión de Cauchy, por lo tanto la serie (1.4) es convergente y se verifica

$$\|e^{tA}\| \leq e^{t\|A\|}, \quad \forall t \geq 0.$$

Además e^{tA} es continua y se verifican las siguiente propiedades

$$\begin{aligned} e^{(t+s)A} &= e^{tA}e^{sA}, \quad \forall t, s \geq 0, \\ e^{0A} &= I. \end{aligned}$$

Así, la familia $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ forma un semigrupo de matrices.

En términos generales, la noción de semigrupos de operadores lineales es una extensión bastante natural de la exponencial de una matriz a la exponencial de un operador posiblemente acotado. Aprovechando la poderosa maquinaria del análisis funcional, la teoría de semigrupos surgió tremendamente entre 1930-1960 através de las grandes contribuciones de Stone, Hille, Yosida, Feller, Lumer, Miyadera y Phillips.

Introducimos el concepto de semigrupos de operadores lineales sobre un espacio de Banach y presentamos algunas propiedades importantes.

Definición 1.7.1. Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{L}(X)$ el espacio de Banach de los operadores lineales y acotados en X . Decimos que una aplicación

$$S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$$

es un semigrupo de operadores lineales y acotados en el espacio X , si satisface:

(i) $S(0) = I$, donde I denota el operador identidad en $\mathcal{L}(X)$.

(ii) $S(t + s) = S(t) \circ S(s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}_+$.

Definición 1.7.2. Sea X un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|_X$ y $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo de operadores lineales y acotados. Decimos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo o C_0 -semigrupo, si verifica

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(S(t) - I)x\|_X = 0, \quad \forall x \in X.$$

El siguiente teorema establece que los C_0 -semigrupos satisfacen la propiedad de acotación para su norma.

Teorema 1.7.1. Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semigrupo en X , entonces existen $M \geq 1$ y $w \geq 0$ tales que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{wt}, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Demostración. Ver Pazy [29], página 4. □

Corolario 1.7.1. Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semigrupo. Entonces, para cada $x \in X$, $S(\cdot)x \in C([0, \infty); X)$.

Demostración. Ver Pazy [29], página 4. □

Definición 1.7.3. Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo de operadores lineales y acotados en X . El operador $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ definido por

$$D(A) := \{x \in X : \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe}\}$$

y

$$Ax := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h}, \quad \forall x \in D(A),$$

es denominado el generador infinitesimal del semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ siendo $D(A)$ su dominio.

Ejemplo 1.7.1. Sea $S(t) = e^{tA}$, con $A \in \mathcal{L}(X)$. Entonces, A es un generador infinitesimal del semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

A continuación presentamos las propiedades frecuentemente utilizadas.

Teorema 1.7.2. Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semigrupo de operadores lineales y acotados y A el generador infinitesimal de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Se verifican las siguientes afirmaciones:

(i) Si $x \in X$ y $t \geq 0$, entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau) d\tau = S(t)x.$$

(ii) Si $x \in X$, entonces para todo $t \geq 0$ se cumple $\int_0^t S(\tau)x d\tau \in D(A)$. Además,

$$A \left(\int_0^t S(\tau)x d\tau \right) = S(t)x - x.$$

(iii) Si $x \in D(A)$, entonces para todo $t \geq 0$ se cumple $S(t)x \in D(A)$ y

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

(iv) Si $x \in D(A)$, entonces

$$S(u)x - S(t)x = \int_t^u AS(\tau)x d\tau = \int_t^u S(\tau)Ax d\tau.$$

Demostración. Ver Pazy [29] página 4. □

Teorema 1.7.3. Sean $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ y $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ dos C_0 -semigrupos con generadores infinitesimales A y B respectivamente. Si $A = B$, entonces $S(t) = T(t)$ para todo $t \geq 0$.

Demostración. Ver Pazy [29] página 6. □

Por los resultados Teorema (1.7.2) y Teorema (1.7.3), afirmamos que para cada $U_0 \in D(A)$, la función $U : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $U(t) = S(t)U_0$ para cada $t \geq 0$ es la única solución clásica del problema de Cauchy homogéneo

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = AU, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Definimos una clase particular de semigrupos que resulta de gran interés por sus diversas aplicaciones.

Definición 1.7.4. Si $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ para todo $t \geq 0$, decimos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un C_0 -semigrupo de contracciones.

Definición 1.7.5. Sea H un espacio de Hilbert. Diremos que el operador lineal $A : D(A) \subseteq H \rightarrow H$ es disipativo si

$$\operatorname{Re}(Av, v)_H \leq 0, \quad \forall v \in D(A).$$

A continuación veremos una caracterización para los generadores infinitesimales de un C_0 -semigrupo de contracciones.

Teorema 1.7.4 (Lumer-Phillips). *Sea A un operador lineal con dominio $D(A)$ denso en X .*

- (i) *Si A es disipativo y existe $\lambda_0 > 0$ tal que el rango $R(\lambda_0 I - A) = X$, entonces A es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo de contracciones sobre X .*
- (ii) *Si A es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo de contracciones sobre X , entonces $R(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ y A es disipativo.*

Demostración. Ver Pazy [29] página 14. □

1.8. Problema de Cauchy no homogéneo

Sea X un espacio de Banach, $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ un operador lineal y el operador no lineal $G : [0, \infty) \rightarrow X$. Dado la condición inicial $U_0 \in X$, el problema de Cauchy no homogéneo consiste en encontrar una solución $U(t)$ para el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt}(t) = AU(t) + G(t), \\ U(0) = U_0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Definición 1.8.1. *Una solución clásica de (1.6) es una función $U : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$U \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1([0, \infty); X)$$

y satisface (1.6).

El siguiente teorema nos proporciona una condición suficiente para la existencia de una solución de (1.6).

Teorema 1.8.1. *Sea A el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Si $G \in C^1([0, \infty); X)$ y $U_0 \in D(A)$, entonces el problema (1.6) tiene una única solución clásica U dada por la fórmula de variación de las constantes (Principio de Duhamel)*

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)G(s)ds, \quad (1.7)$$

Demostración. Ver Zheng [43], página 42. □

Sea U solución de (1.6) definimos

$$w(s) = S(t-s)U(s),$$

es derivable para todo $0 < s < t$ y se cumple

$$\begin{aligned} \frac{dw}{ds} &= -AS(t-s)U(s) + S(t-s)U'(s) \\ &= -AS(t-s)U(s) + S(t-s)(AU(s) + G(s)) \\ &= -AS(t-s)U(s) + S(t-s)AU(s) + S(t-s)G(s) \\ &= S(t-s)G(s). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Si $G \in L^1([0, \infty); X)$, entonces $S(t-s)G(s)$ es integrable e integrando de 0 a t se tiene que

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)G(s)ds \tag{1.9}$$

Para $G \in L^1([0, \infty); X)$, el lado derecho de (1.9) es una función continua. Es natural considerarla como una solución generalizada de (1.6), incluso si no es diferenciable y no satisface la ecuación en el sentido de la definición 1.8.1.

Definición 1.8.2. Sea A el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Sea $U_0 \in X$ y $G \in L^1([0, \infty); X)$. La función $U \in C([0, \infty); D(A))$, dada por

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)G(s)ds, \quad \forall t \geq 0 \tag{1.10}$$

es mild solution o solución generalizada de (1.6).

Corolario 1.8.1. Si $G \in C([0, \infty); D(A))$ y $U_0 \in D(A)$, entonces la mild solution es una solución clásica de (1.6).

Demostración. Ver Zheng [43], página 43. □

Surge de forma natural la pregunta de bajo que condiciones para G la solución generalizada es una solución clásica. Así se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.8.2. Sea $T > 0$, $U_0 \in D(A)$, $G \in C([0, \infty); X)$ y para cada $T > 0$,

$$G' \in L^1([0, T]; X).$$

Entonces, la función U dada por (1.12) es solución clásica del problema (1.6).

Demostración. Ver Zheng [43] página 43. □

Además, si X es un espacio de Banach reflexivo tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.8.2. *Sea $T > 0$ y $U_0 \in D(A)$. Consideramos $G : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ una función Lipschitz continua en. Si X es un espacio de Banach reflexivo, entonces la mild solution U es una solución clásica del problema (1.6).*

Demostración. Ver Zheng [43] página 45. □

1.9. Problema de Cauchy semilineal

Dado el siguiente problema de valor inicial para la ecuación de evolución semilineal

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt}(t) = AU(t) + G(U(t)), \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (1.11)$$

donde A es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sobre un espacio de Banach X , $G : X \rightarrow X$ un operador no lineal y U_0 el valor inicial. Estudiaremos el caso cuando G es globalmente Lipschitz y demostraremos que la ecuación (1.11) tiene una única solución para todo $t \geq 0$.

Definición 1.9.1. *La función $G : X \rightarrow X$ es globalmente Lipschitz si para todo U y $V \in X$ existe una constante $L > 0$ tal que*

$$\|G(U) - G(V)\|_X \leq L\|U - V\|_X.$$

Definición 1.9.2. *Una función $U \in C([0, \infty); D(A))$, dada por*

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)G(U(s))ds, \quad \forall t \geq 0$$

es llamada mild solution de (1.11).

Teorema 1.9.1. *Sea $G : X \rightarrow X$ globalmente Lipschitz (con constante L). Sea A es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sobre X . Dado $U_0 \in X$, existe una única mild solución U para (1.11), esto es, $U \in C([0, +\infty); X)$ y satisface la siguiente ecuación integral*

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)G(U(s))ds, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.12)$$

Además, si $U(t)$ y $\hat{U}(t)$ son mild soluciones correspondientes a los valores iniciales U_0 y \hat{U}_0 , entonces para todo $t \geq 0$, se verifica la siguiente estimativa

$$\|U(t) - \hat{U}(t)\|_X \leq e^{Lt}\|U_0 - \hat{U}_0\|_X. \quad (1.13)$$

Demostración. Para probar este teorema utilizaremos el teorema del punto fijo de Banach. Definiremos un subconjunto cerrado E del espacio de Banach $C([0, +\infty); X)$ y un operador no lineal que mapea E en si mismo. Mostraremos que el operador es una contracción.

Denotemos por

$$E = \{U \in C([0, +\infty); X) : \sup_{t \geq 0} e^{-kt} \|U(t)\|_X < \infty\},$$

donde k es una constante positiva, $k > L$. Sobre E definimos la norma $\|\cdot\|_E$ dada por:

$$\|U\|_E = \sup_{t \geq 0} e^{-kt} \|U(t)\|_X.$$

Se tiene que E es un espacio de Banach. En efecto, sea $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E .

Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|U_n - U_m\|_E < \epsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Luego, para cada $t \geq 0$ se tiene que

$$\|e^{-kt}U_n(t) - e^{-kt}U_m(t)\|_X \leq \sup_{t \geq 0} e^{-kt} \|U_n(t) - U_m(t)\|_X < \epsilon, \quad \forall n, m \geq N. \quad (1.14)$$

Lo cual implica que para cada $t \geq 0$, la sucesión $\{e^{-kt}U_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en X . Como X es un espacio de Banach, entonces existe el $\lim_{n \rightarrow \infty} \{e^{-kt}U_n(t)\}$ en X .

Así, definimos

$$e^{-kt}U(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-kt}U_n(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Tomando el limite en (1.14) cuando $m \rightarrow \infty$, obtenemos que

$$\|e^{-kt}U_n(t) - e^{-kt}U(t)\|_X \leq \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Por lo tanto,

$$\|U_n - U\|_E = \sup_{t \geq 0} e^{-kt} \|U_n(t) - U(t)\|_X \leq \epsilon.$$

Se concluye que U_n converge a U en el espacio E .

Dado $U \in E$ definimos

$$\Phi(U)(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-\tau)G(U(\tau))d\tau, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Mostraremos primero que Φ está bien definida y luego que Φ es una contracción.

- Dado $U \in E$ y por la hipótesis G es globalmente Lipschitz tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\Phi(U(t))\|_X &\leq \|S(t)U_0\|_X + \int_0^t \|S(t-\tau)\|_X \|G(U(\tau))\|_X d\tau \\
&\leq \|U_0\|_X + \int_0^t \|G(U(\tau))\|_X d\tau \\
&\leq \|U_0\|_X + \int_0^t \|G(0)\|_X d\tau + \int_0^t (\|G(U(\tau)) - G(0)\|_X) d\tau \\
&\leq \|U_0\|_X + t\|G(0)\|_X + L \int_0^t \|U(\tau)\|_X d\tau \\
&\leq \|U_0\|_X + t\|G(0)\|_X + L \sup_{t \geq 0} e^{-kt} \|U(t)\|_X \int_0^t e^{k\tau} d\tau \\
&\leq \|U_0\|_X + t\|G(0)\|_X + \frac{L}{k} e^{kt} \|U\|_E, \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (1.15)
\end{aligned}$$

Multiplicando por e^{-kt} y tomando el supremo en (1.15) se tiene que

$$\|\Phi(U)\|_E \leq \sup_{t \geq 0} ((\|U_0\|_X + t\|G(0)\|_X) e^{-kt}) + \frac{L}{k} \|U\|_E < \infty.$$

Luego, $\Phi(U) \in E$.

- Probaremos que Φ es una contracción. Sean $U, V \in E$

$$\begin{aligned}
\|\Phi(U) - \Phi(V)\|_E &= \sup_{t \geq 0} e^{-kt} \left\| \int_0^1 S(t-\tau) (G(U(\tau)) - G(V(\tau))) d\tau \right\|_X \\
&\leq \sup_{t \geq 0} e^{-kt} L \int_0^1 \|U(\tau) - V(\tau)\|_X d\tau \\
&\leq \sup_{t \geq 0} e^{-kt} L \int_0^1 e^{-k\tau} \|U(\tau) - V(\tau)\|_X e^{k\tau} d\tau \\
&\leq \sup_{t \geq 0} e^{-kt} L \|U - V\|_E \int_0^1 e^{k\tau} d\tau \\
&= \sup_{t \geq 0} L e^{-kt} \frac{(e^{kt} - 1)}{k} \|U - V\|_E \\
&\leq \frac{L}{k} \|U - V\|_E \quad (k > L) \\
&\leq \|U - V\|_E.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el teorema del punto fijo de Banach (Teorema 1.6.7) Φ tiene un punto fijo $U \in E$ solución de la ecuación (1.12).

Probaremos la unicidad de la solución. Sean $U_1, U_2 \in C([0, +\infty), X)$ soluciones de

(1.12) y definimos $V = U_1 - U_2$. Entonces,

$$\begin{aligned}\|V(t)\|_X &\leq \int_0^t \|S(t-\tau)(G(U_1(\tau)) - G(U_2(\tau)))\|_X d\tau \\ &\leq L \int_0^1 \|V(\tau)\|_X d\tau.\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Gronwall (1.6.1) se tiene que

$$\|V(t)\|_X \leq 0, \forall t \geq 0,$$

entonces verificamos la unicidad de la solución.

Resta probar el resultado de estabilidad. Sean U y \hat{U} soluciones de (1.12) asociados a los valores iniciales U_0 y \hat{U}_0 , respectivamente. Entonces,

$$\|U(t) - \hat{U}(t)\|_X \leq \|U_0 - \hat{U}_0\|_X + L \int_0^1 \|U(\tau) - \hat{U}(\tau)\|_X d\tau.$$

Aplicando nuevamente la desigualdad de Gronwall (1.6.1) en la desigualdad anterior, se tiene que

$$\|U(t) - \hat{U}(t)\|_X \leq e^{Lt} \|U_0 - \hat{U}_0\|_X.$$

□

Corolario 1.9.1. *Suponga las hipótesis del Teorema 1.9.1. Dado $U_0 \in D(A)$, entonces la mild solución U es una función Lipschitz continua en t .*

Demostración. Sea $h > 0$ y definimos $\hat{U}(t) = U(t+h)$, entonces \hat{U} es una mild solución de la ecuación (1.11) con valor inicial $U(h)$. Por la estimativa (1.13) se tiene que

$$\|U(t+h) - U(t)\|_X = \|\hat{U}(t) - U(t)\|_X \leq e^{Lt} \|U(h) - U_0\|_X. \quad (1.16)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\|U(h) - U_0\|_X &= \|S(h)U_0 - U_0 + \int_0^h S(h-\tau)G(U(\tau))d\tau\|_X \\ &\leq \|S(h)U_0 - U_0\|_X + \int_0^h \|S(h-\tau)G(U(\tau))\|_X d\tau\end{aligned}$$

Y por el Teorema 1.7.2 obtenemos que

$$\begin{aligned}\|U(h) - U_0\|_X &\leq \left\| \int_0^h S(\tau)AU_0 d\tau \right\|_X + \int_0^h \|S(t-\tau)G(U_0)\|_X d\tau \\ &\quad + \int_0^h \|S(h-\tau)(G(U(\tau)) - G(U_0))\|_X d\tau \\ &\leq (\|AU_0\|_X + \|G(U_0)\|_X)h + L \int_0^h \|U(\tau) - U_0\|_X d\tau.\end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Gronwall (1.6.1) en la desigualdad anterior resulta

$$\|U(h) - U_0\|_X \leq (\|AU_0\|_X + \|G(U_0)\|_X)he^{Lh}. \quad (1.17)$$

Así, para todo $t_1, t_2 \in [0, T]$ tenemos de (1.16) y (1.17)

$$\begin{aligned} \|U(t_1) - U(t_2)\|_X &\leq e^{Lt_2} \|U(t_1 - t_2) - U_0\|_X \\ &\leq e^{Lt_2} (\|AU_0\|_X + \|G(U_0)\|_X) |t_1 - t_2| e^{L|t_1 - t_2|} \\ &\leq e^{2LT} (\|AU_0\|_X + \|G(U_0)\|_X) |t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

□

Corolario 1.9.2. *Suponga que X es reflexivo y $U_0 \in D(A)$. Entonces (1.11) tiene una única solución clásica, esto es,*

$$u \in C([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X).$$

Demostración. Por el Corolario 1.9.1, la mild solución U es una función Lipschitz continua en t . Desde que G satisface la condición globalmente Lipschitz, se sigue que $G(U(t))$ es Lipschitz continua en t . Por Corolario 1.8.2 deducimos que la mild solución es una solución clásica del problema (1.11). □

1.10. Diferencias finitas

Sea $u(x, t)$ una función suficientemente suave. La expansión en diferencias finitas para u_t , u_{tt} y u_{xx} se construye a partir de la expansión en serie de Taylor de $u(x, t + \Delta t)$ y $u(x + \Delta x, t)$ alrededor del punto (x, t) . Luego tenemos que:

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + u_t(x, t)\Delta t + u_{tt}(x, t)\frac{(\Delta t)^2}{2} + u_{ttt}(x, t)\frac{(\Delta t)^3}{3!} + \dots, \quad (1.18)$$

$$u(x, t - \Delta t) = u(x, t) - u_t(x, t)\Delta t + u_{tt}(x, t)\frac{(\Delta t)^2}{2} - u_{ttt}(x, t)\frac{(\Delta t)^3}{3!} + \dots \quad (1.19)$$

De la ecuación (1.18) obtenemos

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = u_t(x, t) + \Delta t \left(\frac{u_{tt}(x, t)}{2!} + \Delta t \frac{u_{ttt}(x, t)}{3!} + \dots \right)$$

Entonces

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = u_t(x, t) + O(\Delta t), \quad (1.20)$$

que es una aproximación de primer orden para $u_t(x, t)$, indicando que el error de truncamiento es $O(\Delta t)$.

Otra fórmula de aproximación puede ser obtenida. La más común es la de segundo orden. Restando (1.18) y (1.19) tenemos que

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t - \Delta t)}{2\Delta t} = u_t(x, t) + (\Delta t)^2 \frac{u_{ttt}(x, t)}{3} + \dots$$

Reescribiendo la ecuación anterior

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t - \Delta t)}{2\Delta t} = u_t(x, t) + O((\Delta t)^2). \quad (1.21)$$

Ahora construiremos la ecuación en diferencias para u_{tt} , esto lo obtendremos sumando (1.18) y (1.19),

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t - \Delta t)}{(\Delta t)^2} = u_{tt}(x, t) + (\Delta t)^2 \frac{u_{tttt}(x, t)}{12} + \dots$$

Reescribiendo la ecuación anterior

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t - \Delta t)}{(\Delta t)^2} = u_{tt}(x, t) + O((\Delta t)^2). \quad (1.22)$$

De manera análoga obtenemos la ecuación en diferencias para u_{xx}

$$\frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} = u_{xx}(x, t) + O((\Delta x)^2). \quad (1.23)$$

Definición 1.10.1. Una ecuación en diferencias finitas se dice que es consistente con la ecuación diferencial parcial si en el límite, cuando los tamaños de paso tienden a cero, la ecuación en diferencias es igual a la ecuación diferencial parcial en cada punto de dominio de la solución.

Definiremos la estabilidad para un esquema en diferencias.

Definición 1.10.2. El esquema en diferencias de dos niveles de la forma

$$u^{j+1} = Qu^j, \quad j \geq 0, \quad (1.24)$$

se dice que es estable con respecto a la norma $\|\cdot\|$ si existen constantes positivas Δx_0 y Δt_0 y la constante no negativa K y β tal que

$$\|u^{j+1}\| \leq Ke^{\beta t} \|u^j\|, \quad (1.25)$$

para todo $0 \leq t \leq (j+1)\Delta t$, donde $0 \leq \Delta x \leq \Delta x_0$, $0 \leq \Delta t \leq \Delta t_0$.

La definición de estabilidad implica que las soluciones para ecuaciones en diferencias deben estar acotadas.

Teorema 1.10.1 (Condición de estabilidad de Von Neumann). *La condición necesaria para la estabilidad de Von Neumann nos dice que el esquema en diferencias es estable si*

$$|\rho_i| \leq 1 + C_1 \Delta t, \quad i = 1, \dots, s,$$

donde C_1 es una constante no negativa y ρ_i son los autovalores de la matriz de ampliación Q del sistema de la forma

$$u^{j+1} = Qu^j, \quad j = 1, \dots, s.$$

Demostración. Ver Thomas [40], página 108. □

Definición 1.10.3. *Un esquema en diferencias finitas $D_{i,j}u_{i,j} = F_{i,j}$ de la ecuación diferencial $Dv = F$ es convergente, si para cualquier (x, t) se tiene que $(i\Delta x, j\Delta t) \rightarrow (x, t)$ y $u_{i,j}$ converge a $v(x, t)$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta t \rightarrow 0$.*

Teorema 1.10.2 (Teorema de equivalencia de Lax). *Dado un problema de valor inicial, si su aproximación de diferencias finitas satisface la condición de consistencia, entonces es convergente si y solo si es estable.*

Demostración. Ver Thomas [40], página 79. □

En el siguiente capítulo demostraremos que la ecuación de onda con término disipativo no lineal es descrita a partir de un problema de Cauchy semilineal las cuales se pueden abordar usando la teoría de semigrupos. Para tal objetivo identificaremos el espacio de Banach X , el operador lineal $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ y el operador no lineal $G : X \rightarrow X$ y luego demostraremos resultados que nos permiten aplicar los teoremas expuestos anteriormente.

Capítulo 2

Existencia, unicidad y regularidad de las soluciones mediante semigrupos

En este capítulo mediante la teoría de semigrupos se estudia la existencia y unicidad de las soluciones del problema semilineal asociado a una ecuación de ondas con término disipativo no lineal.

Representamos por $u(x, t)$ el desplazamiento transversal de cada punto x en el tiempo $t \geq 0$, a partir de su posición de equilibrio y $g(u_t)$ la disipación provocada por la fricción. En este caso, el modelo matemático es dado por:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + g(u_t) = 0 & , \text{ en } \Omega \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x); u_t(x, 0) = u_1(x) & , \text{ en } \Omega \\ u(x, t) = 0 & , \partial\Omega \times (0, +\infty), \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto de clase C^∞ , con frontera $\partial\Omega$ limitada.

Vamos a suponer que g es una función real que satisface las siguientes condiciones:

(H1) g es globalmente Lipschitz con constante de Lipschitz C_g

(H2) $g(s)s \geq 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$

El primer paso para resolver la ecuación (2.1) es identificar el espacio natural donde definiremos el semigrupo. Para ello escogeremos el espacio donde la energía del sistema esté bien definida. Suponiendo regularidad suficiente en la ecuación (2.8), tomamos el producto interno de la ecuación diferencial (2.1) con u_t e integramos en Ω , obtenemos que

$$\int_{\Omega} u_{tt} u_t dx - \int_{\Omega} \Delta u u_t dx + \int_{\Omega} g(u_t) u_t dx = 0. \quad (2.2)$$

Aplicando el Teorema de Green (ver Teorema 1.6.5) y sabiendo que u se anula en la frontera de Ω , $\Gamma = \partial\Omega$, tenemos que la expresión anterior puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} |u_t|^2 dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx + \int_{\Omega} g(u_t) u_t dx &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) + \int_{\Omega} g(u_t) u_t dx &= 0, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

La ecuación anterior nos motiva a definir la Energía del sistema por

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right),$$

luego

$$\frac{dE(t)}{dt} = - \int_{\Omega} g(u_t) u_t dx, \quad \forall t \geq 0.$$

Observamos que bajo la hipótesis (H2), se tiene que $E(t)$ es una función decreciente con respecto al tiempo y por lo tanto el sistema (2.1) es disipativo.

Por consiguiente como hemos visto anteriormente, el espacio natural para resolver la ecuación (2.1) es el espacio de Hilbert H donde la energía está bien definida

$$H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \quad (2.3)$$

el cual es dotado del producto interno

$$(U, V)_H = \int_{\Omega} \nabla u_1 \nabla v_1 dx + \int_{\Omega} u_2 v_2 dx \quad (2.4)$$

y de la norma

$$\|U\|_H = \left(\int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 dx + \int_{\Omega} |u_2|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.5)$$

para todo $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ en H .

Considerando el espacio H , vamos a reescribir el problema (2.1) y expresarlo como un sistema de primer grado

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt}(t) = AU + G(U) \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (2.6)$$

donde $U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in H$, la incógnita del sistema es la posición u y la velocidad u_t . El punto inicial es el vector columna $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in H$ cuyas componentes tienen los datos

iniciales de (2.1).

El operador $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ es definido por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

donde el dominio de A es

$$D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega). \quad (2.8)$$

En efecto, por definición del dominio del operador A es el subespacio tal que $AU \in H$ para todo $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H$. Debido a la estructura del operador A tenemos que el dominio es de la forma

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) : \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) : v \in H_0^1(\Omega) \text{ y } \Delta u \in L^2(\Omega) \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega) \right\} \end{aligned}$$

Como el dominio Ω es de clase C^∞ en particular de clase C^2 y de acuerdo al teorema de regularidad para el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace (ver Teorema 1.6.4), garantizamos que las funciones $u \in H_0^1(\Omega)$ tales que $\Delta u \in L^2(\Omega)$ pertenecen en realidad a $H^2(\Omega)$, esto nos permite reescribir el dominio como en (2.8).

El operador no lineal $G : H \rightarrow H$ es definido por

$$G(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(v) \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Hasta aquí hemos visto que el problema (2.1) puede ser expresado como un problema de Cauchy semilineal (2.6), la solución de tal problema se puede abordar en el contexto de la teoría de semigrupos.

Lema 2.0.1. *El operador A definido en (2.7) es lineal y es un generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo de contracciones en H .*

Demostración. Para demostrar que A es un generador de un C_0 -semigrupo de contracciones veremos que A verifica el Teorema de Lumer-Phillips (ver Teorema 1.7.4).

El operador A definido en (2.7) es lineal. En efecto, sean $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$ dos elementos cualquiera del dominio de A y $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\blacksquare A(U + V) = AU + AV$$

$$\begin{aligned} A(U + V) &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ v_1 + v_2 \end{pmatrix} \\ &= v_1 + v_2 + \Delta(u_1 + u_2) \\ &= v_1 + \Delta u_1 + v_2 + \Delta u_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ &= AU + AV. \end{aligned}$$

$$\blacksquare A(\alpha U) = \alpha AU$$

$$\begin{aligned} A(\alpha U) &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha v_1 \end{pmatrix} \\ &= \alpha v_1 + \Delta(\alpha u_1) \\ &= \alpha v_1 + \alpha \Delta u_1 \\ &= \alpha \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha v_1 \end{pmatrix} \\ &= \alpha AU. \end{aligned}$$

Comprobaremos que A es disipativo. En efecto, sea $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$ por la definición de producto interno (2.4) obtenemos que

$$\begin{aligned} (AU, U)_H &= \left(\begin{pmatrix} v \\ \Delta u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_H \\ &= \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx + \int_{\Omega} \Delta u v dx \end{aligned}$$

se sigue del Teorema de Green (ver Teorema 1.6.5) y teniendo en cuenta que $v \in H_0^1(\Omega)$, entonces

$$(AU, U)_H = \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx + \int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = 0.$$

Por lo tanto

$$(AU, U)_H = 0, \quad \forall U \in D(A),$$

lo cual garantiza la disipatividad de A .

Por otra parte, el operador A de la ecuación de ondas verifica que $R(I - A) = H$. En efecto, mostraremos que dado $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H$ podemos encontrar $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$ tal que

$$(I - A) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Dada la forma explícita del operador A , debemos demostrar que existen $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} u - v &= f \\ v - \Delta u &= g. \end{cases} \quad (2.10)$$

La primera ecuación de (2.10) puede reescribirse como $v = u - f$ y substituyendo esta última igualdad en la segunda ecuación de (2.10) obtenemos $u - \Delta u = f + g$. Entonces tenemos el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f + g & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.11)$$

Definimos el operador bilineal asociado $a : H_1^0(\Omega) \times H_1^0(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} uv dx. \quad (2.12)$$

A continuación mostraremos que a es una forma bilineal, coerciva y continua. Por la linealidad del producto se tiene que a es bilineal.

- Sea $u \in H_1^0(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} \nabla u^2 dx + \int_{\Omega} u^2 dx \\ &= \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Así, $a(\cdot, \cdot)$ es coerciva.

- Sean $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Entonces,

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \right| + \left| \int_{\Omega} uv dx \right| \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Poincaré-Friedrich (ver teorema 1.6.3) resulta que

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &= (1 + C) (\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}). \end{aligned}$$

Luego $a(\cdot, \cdot)$ es continua.

Consideramos el funcional $\varphi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\varphi(v) = \int_{\Omega} (f + g)v dx$.

Vamos a demostrar que el funcional φ es lineal y continuo sobre $H_0^1(\Omega)$. La linealidad de φ se obtiene de la linealidad del producto interno en $L^2(\Omega)$.

- Como $f + g \in L^2(\Omega)$. Así, dado $v \in H_0^1(\Omega)$ por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\begin{aligned} |\varphi(v)| &= \left| \int_{\Omega} (f + g)v dx \right| \\ &\leq \|f + g\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Lax-Milgram (ver Teorema 1.6.6) existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, \phi) = (\varphi, \phi), \quad \text{para todo } \phi \in H_0^1(\Omega).$$

En particular, se tiene que

$$a(u, \phi) = (\varphi, \phi), \quad \text{para todo } \phi \in D(\Omega).$$

Luego

$$-\Delta u + u = f + g$$

en el sentido de la distribuciones.

Además por el Teorema de Regularización para el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace (ver Teorema 1.6.4) $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Como $v = u - f$, y $u, f \in H_0^1(\Omega)$ entonces

$$v \in H_0^1(\Omega).$$

De las propiedades de los espacios de Sobolev, tenemos que $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Así, hemos probado que A es disipativo y $R(I - A) = H$, entonces por el Teorema de Lumer-Phillips (ver Teorema 1.7.4), A es un generador infinitesimal en un C_0 semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ en H . \square

El siguiente resultado establece la existencia, unicidad y regularidad para la solución clásica del problema (2.1).

Teorema 2.0.1. *Considere la ecuación (2.1) y supongamos que g satisface la hipótesis (H1). Entonces si $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ existe una única solución $u(x, t)$ tal que*

$$u \in C([0, +\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, +\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0, +\infty); L^2(\Omega)).$$

Demostración. Aplicaremos el Corolario 1.9.2 con la finalidad de deducir la existencia de la solución y de la regularidad del problema abstracto (2.6). Por la equivalencia de la ecuación (2.6) con (2.1) obtenemos los resultados de existencia, unicidad y regularidad para u .

Por la hipótesis $g(u) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función globalmente Lipschitz, esto es, dados $v_1, v_2 \in L^2(\Omega)$ existe $c_g > 0$ tal que

$$\|g(v_1) - g(v_2)\|_{L^2(\Omega)} \leq c_g \|v_1 - v_2\|_{L^2(\Omega)}.$$

Se cumple que G definida en (2.9) es una función globalmente Lipschitz en H

En efecto, dados $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in H$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|G(U) - G(V)\|_H &= \left(\int_{\Omega} |g(u_2) - g(v_2)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_g \left(\int_{\Omega} |u_2 - v_2|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_g \left\{ \left(\int_{\Omega} |\nabla u_1 - \nabla v_1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} |u_2 - v_2|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right\} = c_g \|U - V\|_H. \end{aligned}$$

Considerando $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in D(A)$, por Lema 2.0.1 A es un generador infinitesimal de un C_0 semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ y G es una función globalmente Lipschitz, entonces por el Corolario 1.9.2 concluimos que la mild solución $U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)G(U(s))ds$ es la única solución clásica del problema de valor inicial (2.6) y

$$U \in C([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); H).$$

Como $v = u_t$, tenemos que la regularidad de U equivale a

$$\begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in C([0, +\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, +\infty); H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)),$$

esto es

$$u \in C([0, +\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, +\infty); H_0^1(\Omega)) \quad (2.13)$$

$$u_t \in C^1([0, +\infty); L^2(\Omega)). \quad (2.14)$$

De (2.13) y (2.14) concluimos que, para cada par de condiciones iniciales u_0 y u_1 existe una única solución u tal que

$$u \in C([0, +\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, +\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0, +\infty); L^2(\Omega)).$$

□

Para probar resultados de existencia, unicidad y regularidad del problema (2.1) encontramos diversos tales como: método de Faedo-Galerkin, transformada de Fourier, teoría de semigrupos, etc. En particular la teoría de semigrupos nos brinda un método elegante para la construcción de una solución del problema de valor inicial y de frontera (2.1).

Capítulo 3

Decaimiento exponencial de las soluciones

En este capítulo, con algunas hipótesis adicionales para la función g estudiaremos el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación de onda con término disipativo no lineal. La demostración será basada en el Método de la energía. Este método consiste en construir un funcional de Lyapunov $E_\epsilon(t)$, que es equivalente al funcional de la energía $E(t)$, y luego a partir de esta equivalencia obtener el decaimiento exponencial.

Definición 3.0.1. *Decimos que la energía del sistema $E(t)$ asociado al problema 2.1 posee decaimiento exponencial, si existen constantes $C > 0$ y $\gamma > 0$ tal que*

$$E(t) \leq Ce^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Teorema 3.0.1. *Supongamos que g verifica las condiciones (H1), (H2) y además satisface:*

(H3) *Existe $k_1 > 0$ tal que $sg(s) \geq k_1 s^2$, $\forall s \in \mathbb{R}$*

entonces, la energía asociada al problema (2.1)

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |u_t(x, t)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx \right) \quad (3.1)$$

decae exponencialmente.

Demostración. El Método de la energía consiste en construir un funcional E_ϵ equivalente a la energía, es decir, existen constantes positivas C_1 y C_2 tal que

$$C_1 E(t) \leq E_\epsilon(t) \leq C_2 E(t), \quad \forall t \geq 0.$$

y existe $\omega > 0$ tal que

$$\frac{dE_\epsilon}{dt} + \omega E_\epsilon \leq 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Esta desigualdad implica que

$$E_\epsilon(t) \leq E_\epsilon(0)e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Primero veamos que la energía es una función decreciente. En el problema inicial (2.1), multipliquemos por u_t e integremos en Ω

$$\int_{\Omega} u_t u_{tt} dx - \int_{\Omega} u_t \Delta u dx = - \int_{\Omega} u_t g(u_t) dx$$

Aplicando el Teorema de Green (Teorema 1.6.5) y sabiendo que u se anula en la frontera de Ω , obtenemos que la expresión anterior puede ser reescrita como

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_t|^2 dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx = - \int_{\Omega} u_t g(u_t) dx.$$

Por la definición de la energía dada en (3.1), se cumple que

$$\frac{dE(t)}{dt} = - \int_{\Omega} u_t g(u_t) dx.$$

Y por la hipótesis (H3) resulta que

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq -k_1 \int_{\Omega} |u_t|^2 dx. \quad (3.2)$$

Dado $\epsilon > 0$, definimos la energía perturbada E_ϵ , por

$$E_\epsilon(t) = E(t) + \epsilon \int_{\Omega} u u_t dx, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.3)$$

Veamos que $E_\epsilon(t)$ es equivalente a la energía $E(t)$.

En efecto, utilizando la desigualdad Cauchy-Schwarz (Teorema 1.6.1), Poincaré (Teorema 1.6.3) y Young (Teorema 1.6.1) se verifica que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u u_t dx \right| &\leq \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |u_t|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{C} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |u_t|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{C} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \right) \\ &= \sqrt{C} E(t), \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Así,

$$(1 - \epsilon\sqrt{C})E(t) \leq E_\epsilon(t) \leq (1 + \epsilon\sqrt{C})E(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Definimos $C_1 = (1 - \epsilon\sqrt{C})$ y $C_2 = (1 + \epsilon\sqrt{C})$, con $0 < \epsilon < \frac{1}{\sqrt{C}}$, entonces

$$C_1 E(t) \leq E_\epsilon(t) \leq C_2 E(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.4)$$

Lo siguiente es demostrar que existe una constante $\omega > 0$ tal que

$$E'_\epsilon(t) \leq -\omega E_\epsilon(t), \quad t \geq 0.$$

En efecto, derivando la energía perturbada se tiene

$$E'_\epsilon(t) = E'(t) + \epsilon \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \epsilon \int_{\Omega} u_{tt} u dx$$

Como u verifica la ecuación (2.1) y aplicando el Teorema de Green (Teorema 1.6.5) se tiene que

$$\begin{aligned} E'_\epsilon(t) &= E'(t) + \epsilon \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \epsilon \int_{\Omega} \Delta u u dx - \epsilon \int_{\Omega} g(u_t) u dx \\ &= E'(t) + \epsilon \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \epsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \epsilon \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma - \epsilon \int_{\Omega} g(u_t) u dx. \end{aligned}$$

Desde que u se anula en la frontera,

$$E'_\epsilon(t) = E'(t) + \epsilon \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \epsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \epsilon \int_{\Omega} g(u_t) u dx. \quad (3.5)$$

Calculemos una cota superior para el último sumando de (3.5). Como g es una función Lipschitz continua con constante de Lipschitz C_g se tiene que

$$\begin{aligned} -\epsilon \int_{\Omega} u g(u_t) dx &\leq \epsilon \int_{\Omega} |u(g(u_t) - g(0))| dx \\ &\leq \epsilon C_g \int_{\Omega} |u| |u_t - 0| dx \\ &\leq \epsilon C_g \int_{\Omega} |u| |u_t| dx. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (Teorema 1.6.1), Poincaré (Teorema 1.6.3) y Young (Teorema 1.6.1) encontramos

$$\begin{aligned} -\epsilon \int_{\Omega} u g(u_t) dx &\leq \epsilon C_g \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |u_t|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \epsilon C_g \sqrt{C} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |u_t|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \epsilon C_g \sqrt{C} \left(\frac{\epsilon C_g \sqrt{C}}{k_1} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\frac{k_1}{\epsilon C_g \sqrt{C}} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \epsilon C_g \sqrt{C} \left[\frac{\epsilon C_g \sqrt{C}}{2k_1} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{k_1}{2\epsilon C_g \sqrt{C}} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \right] \\ &= \frac{\epsilon^2 C_g^2 C}{2k_1} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{k_1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Y por las desigualdades (3.2) y (3.6) en (3.5), resulta que

$$\begin{aligned} E'_\epsilon(t) &\leq -k_1 \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \epsilon \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \epsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{\epsilon^2 C_g^2 C}{2k_1} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{k_1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \\ &= -\left(\frac{k_1}{2} - \epsilon\right) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon C_g C}{2k_1}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \end{aligned}$$

Tomamos $\epsilon = \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{k_1}{2}, \frac{2k_1}{C_g C}, \frac{1}{\sqrt{C}} \right\}$ y consideramos $\omega_0 = \min \left\{ \frac{k_1}{2} - \epsilon, \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon C_g C}{2k_1}\right) \right\}$, entonces

$$E'_\epsilon(t) \leq -\omega_0 E(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Luego, por el lado derecho de (3.4) y por la desigualdad anterior

$$E'_\epsilon(t) \leq -\frac{\omega_0}{1 + \epsilon\sqrt{C}} E_\epsilon(t), \quad \forall t \geq 0.$$

En la desigualdad anterior multiplicamos por $e^{\omega t}$ y luego integramos en $(0, t)$ obtenemos

$$E_\epsilon(t) \leq E_\epsilon(0) e^{-\omega t},$$

con $\omega = \frac{\omega_0}{1 + \epsilon\sqrt{C}}$.

Nuevamente, por la desigualdad (3.4) se tiene que

$$E(t) \leq \left(\frac{1 + \epsilon\sqrt{C}}{1 - \epsilon\sqrt{C}} \right) E(0) e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

□

Capítulo 4

Implementación computacional de la cuerda vibrante en FreeFem++

En este capítulo presentamos el software FreeFem++, estudiamos su funcionamiento y programación. Seguidamente describimos el método numérico de diferencias finitas el cual es utilizado para aproximar la solución de problema (2.1) que modela el desplazamiento vertical de la cuerda con extremos fijos para el caso unidimensional de la variable espacial. Por último, analizamos los resultados obtenidos en FreeFem++ a través de Gnuplot para la visualización de los gráficos.

4.1. El software FreeFem++

FreeFem++ es un software libre que nos permite resolver ecuaciones diferenciales parciales (EDP's) a través del Método de Elementos Finitos (MEF) para problemas en dos y tres dimensiones espaciales. Este software está escrito en el lenguaje C++ y ofrece al usuario un lenguaje propio que es muy similar a la representación matemática del problema. Además es multiplataforma con los diversos sistemas operativos tales como UNIX, Windows y Mac OS.

El proyecto surge en el año 1985 cuando Oliver Pironneau publicó MacFEM y PCFEM dos códigos libres para elementos finitos escritos en el lenguaje Pascal para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales en dos dimensiones. En 1992, fue reescrito en C++ y el software cambia a dominio libre, convirtiéndose en FreeFem. Posteriormente surgen otras versiones FreeFem+ (1996) y después de una reelaboración completa con la sintaxis surge FreeFem++(1998). Algunas características de FreeFem++ que podemos resaltar son :

- Definición del problema mediante la formulación variacional. Posee un lenguaje propio para una rápida comprensión de los códigos.
- Descripción analítica de las fronteras.
- Generación automática de la malla basada en el algoritmo de Delaunay-Voronoi [15].
- Diversos elementos finitos tales como: elementos finitos de lagrange lineales y cuadráticos, discontinuos, elementos de Raviart-Thomas, elementos finitos vectoriales, etc.
- Diferentes métodos de resolución para sistemas lineales tales como LU, Cholesky, CG(gradientes conjugados), UMFPACK [13] y GMRES [37].
- Creación de archivos .txt, .eps, .gnu, así como la lectura y escritura de archivos para el mallado y herramientas de visualización.
- Amplia variedad de ejemplos para problemas elípticos, parabólicos, hiperbólicos, Navier-Stokes, interacción fluido-estructura, etc.

Para este trabajo se utilizará FreeFem++-cs, el cual es un ambiente de desarrollo integrado para FreeFem++ que fue desarrollado por Antonie Le Hyaric. FreeFem++-cs nos permite una interfaz gráfica para FreeFem++ sumamente agradable para el usuario. FreeFem++-cs incluye un editor de scripts con resaltado de la sintaxis, una ventana de visualización y un área de información sobre compilación y ejecución ver Figura 4.1. La versión que hemos empleado es FreeFem++-cs 10.13 en el sistema operativo Ubuntu 16.04.

FreeFem++-cs 10.13 lo podemos descargar gratuitamente desde

`http://www.ann.jussieu.fr/~lehyaric/ffcs/index.htm`

Podemos describir de modo general la estructura de un script (.edp) en FreeFem++

- Definir el dominio de resolución del problema detallando su frontera
- Construir el mallado del dominio.
- Declarar el espacio de los elementos finitos y de las funciones del espacio.
- Especificar la forma variacional del problema.
- Almacenar la solución y la malla calculada. Realizar la gráfica de la solución.

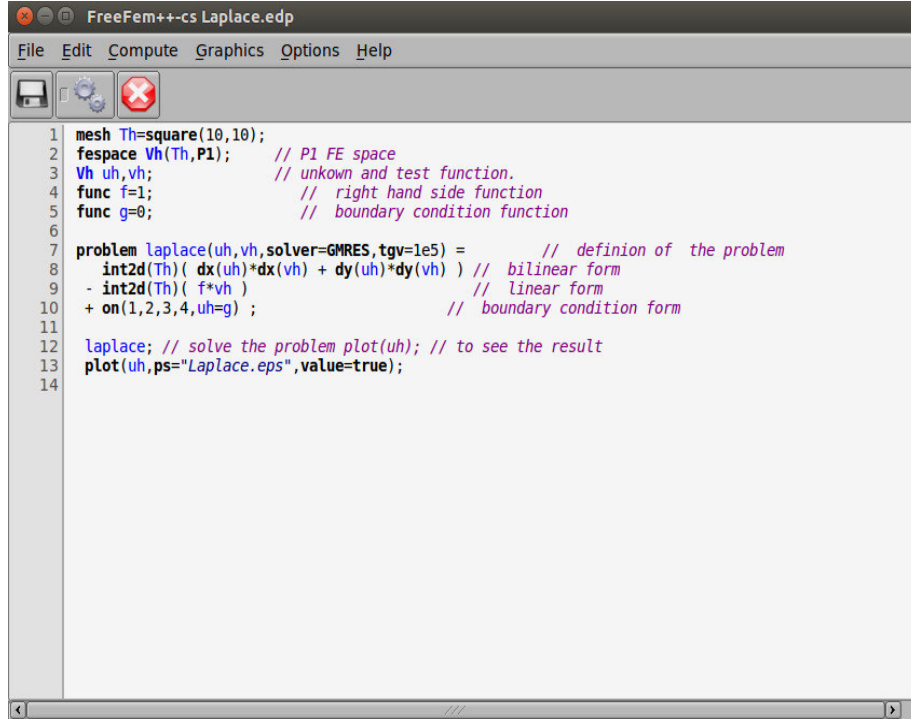


Figura 4.1: FreeFem++-cs: Entorno de desarrollo integrado para FreeFem++.

4.2. Método de diferencias finitas

El método de diferencias finitas (MDF) es uno de los métodos más antiguos para obtener soluciones aproximadas de las ecuaciones diferenciales parciales. Nos encontramos con varios libros que ofrecen material bastante amplio sobre las diferencia finitas y sus aplicaciones ver Thomas [40], Strikwerda [39] y Quarteroni [33].

El procedimiento del método de diferencias finitas consiste en la reformulación del problema continuo en un problema discreto usando fórmulas de diferencias finitas tomadas sobre una malla (conjunto de puntos) apropiada, el cual es determinada mediante la estabilidad del esquema de diferencias. De esta forma, la ecuación diferencial se reduce a resolver una ecuación algebraica para cada punto de la malla. Para ilustrar el método consideramos el siguiente problema con condiciones de frontera:

$$\begin{cases} u_{xx} &= f(x), a < x < b, \\ u(a) &= u_a, \\ u(b) &= u_b, \end{cases} \quad (4.1)$$

donde $u_a, u_b \in \mathbb{R}$.

La malla consiste en una representación discreta del dominio $\Omega = [a, b]$. Construiremos la malla uniforme que consiste de N puntos igualmente espaciados. Así, dado $N \in \mathbb{N}$

tomamos como malla el siguiente conjunto discreto

$$\{x_0, x_1, \dots, x_N\},$$

donde $x_i = a + i\Delta x$, $i = 0, \dots, N - 1$ y $\Delta x = \frac{b-a}{N}$, el cual es denominado tamaño de paso de la malla.

En la siguiente etapa vamos aproximar las ecuaciones diferenciales por diferencias finitas. Tenemos que en los puntos de la malla x_i se cumple

$$u_{xx}(x_i) = f(x_i), i = 1, \dots, N - 1.$$

Utilizando la fórmula en diferencias finitas de orden dos (ver (1.21)), tenemos que:

$$-\left(\frac{u(x_i - \Delta x) - 2u(x_i) + u(x_i + \Delta x))}{(\Delta x)^2}\right) + O((\Delta x)^2) = f(x_i).$$

Reordenando los términos, se tiene que

$$-\left(\frac{u(x_i - \Delta x) - 2u(x_i) + u(x_i + \Delta x))}{(\Delta x)^2}\right) = f(x_i) + O((\Delta x)^2).$$

Ahora, denotemos por u_i la aproximación numérica de $u(x_i)$, por la ecuación anterior concluimos que

$$-\frac{1}{(\Delta x)^2}u_{i-1} + \frac{2}{(\Delta x)^2}u_i - \frac{1}{(\Delta x)^2}u_{i+1} + 1 = f(x_i), \quad i = 1, \dots, N - 1. \quad (4.2)$$

Observamos que tenemos $N + 1$ incógnitas u_i y por (4.2) solamente tenemos $N - 1$. Para tener las ecuaciones que faltan usamos las condiciones de contorno de la ecuación (4.1),

$$u_0 = u_a \quad (4.3)$$

$$u_N = u_b. \quad (4.4)$$

Por lo tanto de las ecuaciones (4.2), (4.3) y (4.4) tenemos el esquema en diferencias finitas

$$\begin{cases} -\frac{1}{(\Delta x)^2}u_{i-1} + \frac{2}{(\Delta x)^2}u_i - \frac{1}{(\Delta x)^2}u_{i+1} + 1 = f(x_i), & i = 1, \dots, N - 1. \\ u_0 = u_a \\ u_N = u_b. \end{cases}$$

Observación: El esquema de diferencias finitas presentado en el ejemplo anterior es denominado explícito, pues una vez calculada la solución en el nivel de tiempo i , la solución en el siguiente nivel de tiempo $i + 1$ es encontrado de forma explícita.

4.3. Método de diferencias finitas

En esta sección utilizaremos MDF para la ecuación de onda con disipación lineal en una dimensión:

$$u_{tt} - u_{xx} + u_t = 0, \quad x \in (0, 1), t \in (0, 1) \quad (4.5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x); u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in [0, 1] \quad (4.6)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in (0, 1) \quad (4.7)$$

Sea u una función suficientemente suave, luego podemos construir la ecuación de diferencias finitas para u_t , u_{tt} y u_{xx} por (1.21), (1.22) y (1.23) .

$$u_{tt}(x, t) = \frac{u(x, t + \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t - \Delta t))}{(\Delta t)^2} + O((\Delta t)^2), \quad (4.8)$$

$$u_t(x, t) = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t - \Delta t))}{2\Delta t} + O((\Delta t)^2), \quad (4.9)$$

y

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t))}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2). \quad (4.10)$$

Para la aplicación del método de diferencias finitas, comenzamos por la discretización del dominio de la ecuación (4.5). Consideramos particiones uniformes tanto para el espacio como el tiempo

$$x_i = i\Delta x, \quad t_j = j\Delta t,$$

donde i, j son enteros positivos y $\Delta x, \Delta t$ son los tamaños de paso para la variable espacio x y tiempo t respectivamente

$$\Delta x = \frac{1}{N}, \quad \Delta t = \frac{1}{M},$$

donde M, N son números enteros positivos. La malla correspondiente es ilustrada en la Figura (4.2). Se aproximarán los valores de u en los puntos del mallado. Sea $u_{i,j}$ la aproximación de la función $u(x, t)$ en los puntos (x_i, t_j) del dominio discreto, es decir,

$$u_{i,j} = u(x_i, t_j). \quad (4.11)$$

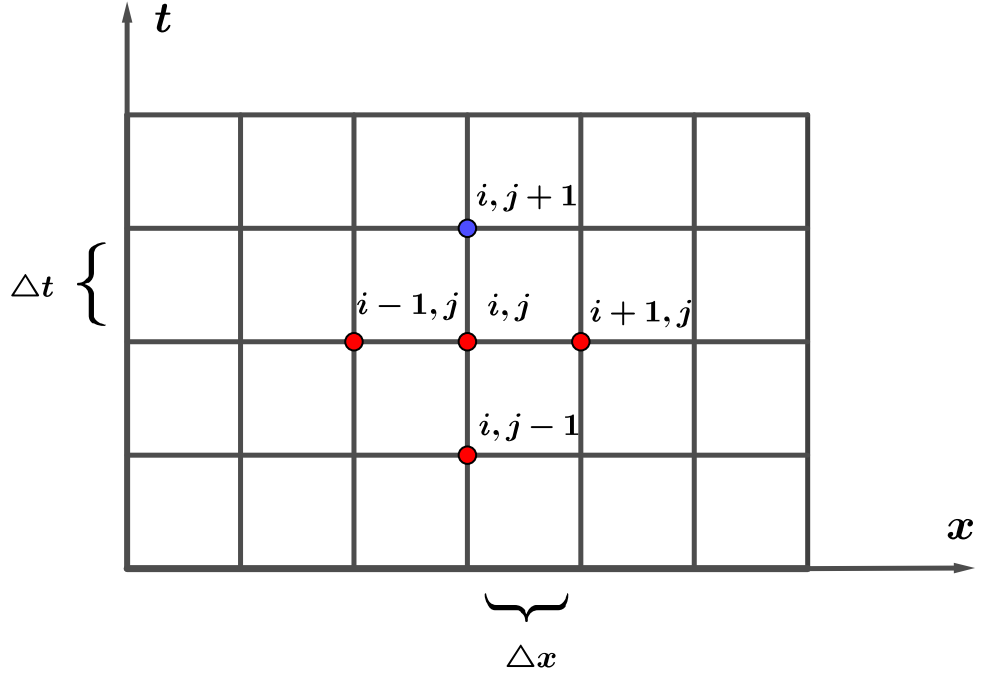


Figura 4.2: Malla. El punto de la malla en azul representa el valor a calcular $u_{i,j+1}$, y los puntos en rojo son los valores conocidos $u_{i,j}$ y $u_{i,j-1}$ para cada i en el dominio discreto.

Luego, reemplazando las ecuaciones (4.8), (4.9) y (4.10) en (4.5) se obtiene

$$\left(\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta t)^2} \right) - \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) + \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2(\Delta t)} \right) = 0. \quad (4.12)$$

Multiplicando la igualdad (4.12) por $(\Delta x)^2$, se tiene que

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} - s(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + \frac{\Delta t}{2}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) = 0, \quad (4.13)$$

donde denotamos $s = (\frac{\Delta t}{\Delta x})^2$.

Despejando $u_{i,j+1}$ en (4.13) tenemos el esquema de diferencias finitas explícito.

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{(1 + \frac{\Delta t}{2})} \left\{ 2(1 - s)u_{i,j} - \left(1 - \frac{\Delta t}{2}\right)u_{i,j-1} + s(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \right\}. \quad (4.14)$$

La expresión (4.14) nos permite encontrar el valor de u en el tiempo $j + 1$ en términos los tiempos anteriores, j y $j - 1$. Además esta expresión es válida en el interior de la malla, es decir para todo $i = 1, \dots, M - 1$ e $j = 1, \dots, N - 1$.

También por las condiciones de frontera (4.7), $u_{0,j}$ y $u_{N,j}$ son valores conocidos,

$$u_{0,j} = u_{N,j} = 0, \quad j = 0, \dots, M.$$

Observamos que si tenemos $\{u_{i,j}\}$ y $\{u_{i,j-1}\}$ entonces la solución $\{u_{i,j+1}\}$ puede ser calculada directamente por (4.14). Por lo tanto, el esquema (4.14) es explícito. Así, para iniciar la iteración del método en $j = 2$ utilizaremos la condición iniciales en $j = 0$ (4.6) y para calcular los valores en $j = 1$ usamos la aproximación por diferencias centradas:

$$u_{i,0} = u_0(x), \quad i = 1, \dots, N-1.$$

$$u_{i,1} = u_{i,0} + (\Delta t)u_1(x_i)$$

Veamos que el esquema (4.14) es consistente con la ecuación diferencial parcial (4.5). Como la consistencia se da en cada punto del dominio discreto, entonces sea (x_i, y_j) un punto fijo y arbitrario del dominio discreto y considerando la notación dada en (4.11) tenemos por la expansión de Taylor

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} + \frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = & \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta t)^2} + (\Delta t)^2 \left(-\frac{1}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, \zeta)}{\partial t^4} \right) \\ & - \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + (\Delta x)^2 \left(-\frac{1}{12} \frac{\partial^4 u(\zeta, t_j)}{\partial x^4} \right) \right) \\ & + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2(\Delta t)} + (\Delta t)^2 \left(-\frac{1}{3} \frac{\partial^3 u(x_i, \zeta)}{\partial t^3} \right). \end{aligned}$$

Reordenando los términos, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} + \frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = & \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta t)^2} - \frac{u_{i+1,j} + 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \\ & + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2(\Delta t)} + (\Delta t)^2 \left(-\frac{1}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, \zeta)}{\partial t^4} \right) \\ & - (\Delta x)^2 \left(-\frac{1}{12} \frac{\partial^4 u(\zeta, t_j)}{\partial x^4} \right) + (\Delta t)^2 \left(-\frac{1}{3} \frac{\partial^3 u(x_i, \zeta)}{\partial t^3} \right). \end{aligned}$$

Sea

$$E_{i,j} = (\Delta t)^2 \left(-\frac{1}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, \zeta)}{\partial t^4} \right) - (\Delta x)^2 \left(-\frac{1}{12} \frac{\partial^4 u(\zeta, t_j)}{\partial x^4} \right) + (\Delta t)^2 \left(-\frac{1}{3} \frac{\partial^3 u(x_i, \zeta)}{\partial t^3} \right), \quad (4.15)$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} + \frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} - \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta t)^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \\ - \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2(\Delta t)} = E_{i,j}. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que el algoritmo en diferencias finitas difiere de la ecuación diferencial parcial en los términos $E_{i,j}$ el cual se denomina error de truncamiento o error de discretización.

Luego, tomando valor absoluto en (4.15)

$$\begin{aligned} |E_{i,j}| &\leq \frac{(\Delta t)^2}{12} \left| \frac{\partial^4 u(x_i, \zeta)}{\partial t^4} \right| + \frac{(\Delta x)^2}{12} \left| \frac{\partial^4 u(\zeta, t_j)}{\partial x^4} \right| + \frac{(\Delta t)^2}{3} \left| \frac{\partial^3 u(x_i, \zeta)}{\partial t^3} \right| \\ &\leq \frac{(\Delta t)^2}{12} P + \frac{(\Delta x)^2}{12} Q + \frac{(\Delta t)^2}{3} R, \end{aligned}$$

donde P, Q y R son las cotas respectivas, entonces cuando $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta t \rightarrow 0$, tenemos que $E_{i,j} \rightarrow 0$, como (x_i, t_j) es un punto arbitrario de dominio discreto. Entonces para cada punto de la malla tenemos que $E_{i,j} \rightarrow 0$. Por lo tanto, decimos que el algoritmo es consistente.

Realizamos el análisis de la estabilidad del algoritmo usando el criterio de Von Neumann. La idea de este criterio es desarrollar la solución numérica en series finitas de Fourier (denominado modo de Fourier) y observar la evolución en el tiempo de cada componente. Consideramos el modo de Fourier para el problema

$$u_{i,j} = \lambda^j e^{Iki\Delta x},$$

donde $I = \sqrt{-1}$ y k es un número entero cualquiera. El modo de Fourier es insertado en el esquema de diferencias finitas (4.14) y obtenemos

$$\lambda^{j+1} e^{Iki\Delta x} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta t}{2}\right)} \left\{ 2(1-s)\lambda^j e^{Iki\Delta x} - \left(1 - \frac{\Delta t}{2}\right) \lambda^{j-1} e^{Iki\Delta x} \right. \quad (4.16)$$

$$\left. + s(\lambda^j e^{Ik(i+1)\Delta x} + \lambda^j e^{Ik(i-1)\Delta x}) \right\}. \quad (4.17)$$

Dividiendo (4.16) por $\lambda^{j-1} e^{Iki\Delta x}$

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta t}{2}\right)} \left\{ 2(1-s)\lambda - \left(1 - \frac{\Delta t}{2}\right) + \lambda s(e^{Ik\Delta x} + e^{-Ik\Delta x}) \right\} \\ \left(1 + \frac{\Delta t}{2}\right) \lambda^2 &= 2 - 2s - \left(1 - \frac{\Delta t}{2}\right) + 2\lambda s \cos(k\Delta x) \end{aligned}$$

Luego, tenemos una ecuación cuadrática de variable λ

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{2}\right) \lambda^2 - (2 - 2s + 2s \cos(k\Delta x)) \lambda - \left(1 - \frac{\Delta t}{2}\right) = 0. \quad (4.18)$$

Tomemos en cuenta que $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ son la raíces de la ecuación. La condición de estabilidad establece que si $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| < 1$, entonces el esquema es estable. Dados que $|\lambda_1 \lambda_2| = \frac{1 - \frac{\Delta t}{2}}{1 + \frac{\Delta t}{2}} < 1$ es suficiente que la raíces sean complejos conjugados para obtener $|\lambda_1| =$

$|\lambda_2| < 1$ que equivale a imponer que el discriminante de la ecuación sea menor o igual a cero

$$\begin{aligned}(2 - 2s + 2s \cos k\Delta x)^2 - 4\left(1 + \frac{\Delta t}{2}\right)\left(1 - \frac{\Delta t}{2}\right) &\leq 0 \\(2 - 4s \sin^2(k\Delta x))^2 - 4\left(1 - \frac{\Delta t^2}{4}\right) &\leq 0 \\(1 - 2s \sin^2(k\Delta x))^2 - \left(1 - \frac{\Delta t^2}{4}\right) &\leq 0 \\(1 - 2s \sin^2(k\Delta x))^2 &\leq \left(1 - \frac{\Delta t^2}{4}\right).\end{aligned}$$

Luego,

$$|1 - 2s \sin^2(k\Delta x)| < 1. \quad (4.19)$$

Como (4.19) es equivalente a

$$0 < 2s \sin^2(k\Delta x) < 2.$$

Como la función $\sin^2(k\Delta x)$ está limitado en el intervalo $[0, 1]$, la desigualdad de arriba es válida si

$$s < 1.$$

Por lo tanto, el esquema (4.14) es estable si $\frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$.

Hasta ahora hemos mostrado que el esquema (4.14) es consistente y estable, pero en virtud del teorema de la equivalencia de Lax, concluimos que el algoritmo es estable.

4.4. La Solución Numérica mediante FreeFem++

Para calcular la solución aproximada de la ecuación que modela el movimiento de la cuerda, primero escribiremos un programa en FreeFem++, segundo visualizaremos las gráficas a través de Gnuplot y finalmente el archivo batch mode nos permitirá obtener una salida simultánea de las gráficas de la solución. La implementación del programa se realizó en una computadora portátil con el sistema operativo Ubuntu 16.04 LTS, procesador Intel(R) Core(TM) i5-2520M de 2.50GHz y 4Gb de memoria RAM.

Como hemos mencionado anteriormente FreeFem++ tiene como lenguaje base C++. Para el caso unidimensional de la variable espacial, el código escrito en FreeFem++ será empleado como si tratase de programar en C++.

El código `disipacion1d.edp` implementado en FreeFem++ resuelve la ecuación (4.5) con el método de diferencias finitas. Además, resulta de gran ayuda el programa Gnuplot version 5.0 (ver Apéndice) que nos permite visualizar la gráfica de los archivos de datos

resulj.txt generados por el código disipacion1d.edp.

A continuación se muestra el código para la cuerda vibrante

```
1  real a=0,b=1,T=1,s; // parametros
2  int N=20,M=25; // numero de intervalos para x y t
3  real dx=(b-a)/N,dt=T/M; // tamaño de paso
4  real[int] x(10000),t(10000); // vectores que almacenan las
    variables x y t
5  real[int,int] u(10000,10000); // matriz que almacena los
    desplazamientos
6  string fn; //almacena cadena de caracteres
7  func real u0(real x) // condicion inicial para el
    desplazamiento
8  { return sin(2*pi*x);
9  }
10 func real u1(real x) //condicion inicial para la velocidad
11 {return 0;
12 }
13 x(0)=a;
14 t(0)=0;
15 s=dt/dx;
16 for (int i=1;i<=N;i++)
17     x(i)=x(i-1)+dx;
18     for (int j=1;j<=M;j++)
19         t(j)=t(j-1)+dt;
20         for (int j=0;j<=M;j++)
21             { u(0,j)=0;
22               u(N,j)=0;
23             }
24     for (int i=1;i<=N-1;i++)
25     { u(i,0)=u0(x(i));
26     }
27     for (int i=1;i<=N-1;i++)
28     {
29         u(i,1)=(dt)*(u1(x(i)))+u(i,0);
30     }
31     for (int j=1;j<=M;j++)
32     {
33         for (int i=1;i<=N-1;i++)
34             {u(i,j+1)= ((2-2*s)*u(i,j)-(1-(dt/2))*u(i,j-1)
35                        +s*(u(i+1,j)+u(i-1,j)))/(1+(dt/2));
36             }
37     }
38     for (int j=0;j<=M;j++)
39     { fn="resul"+j+".txt";
40       ofstream gnu(fn);
41       for (int i=0;i<=N;i++)
```

```

42     {
43         gnu << x(i) << "                "<< u(i,j) << endl;
44     }
45 }

```

Explicaremos detalladamente línea por línea el código `disipacion1d.edp`.

1. En la primera línea se declaran las variables del problema de tipo real:
 - $a=0$, extremo izquierdo de la cuerda
 - $b=1$, extremo derecho de la cuerda
 - $T=1$, tiempo final
 - s , representa $s = (\frac{\Delta t}{\Delta x})^2$
2. En la segunda línea se declaran las variables enteras: $N=20$, número de particiones del espacio y $M=25$, número de particiones del tiempo.
3. En la tercera línea se declaran y definen las variables reales: dt tamaño de paso del tiempo y dx tamaño de paso del espacio.
4. En la cuarta línea se declaran los vectores de componentes reales x y t de 1000 elementos cada uno.
5. En la quinta línea se declara la matriz de entradas reales u de 10000 filas y 10000 columnas, que va a almacenar los valores del desplazamiento de la cuerda.
6. En la sexta línea se declara el objeto string `fn` el cual va a almacenar una cadena de caracteres, es decir una sucesión de caracteres como por ejemplo letras, números o símbolos.
7. En las líneas 7, 8, 9 y 10 se declaran las funciones el desplazamiento inicial y la velocidad de la cuerda $u0$ y $u1$ respectivamente mediante la orden `func`.
8. En la línea 13, se inicializa el primer elemento del vector x igual a a .
9. En la línea 14, se inicializa el primer elemento del vector t igual a 0.
10. En la línea 15, se asigna el valor de s igual a $(dt/dx)^2$.
11. En las líneas 16 y 17, el ciclo `for` establece los valores del vector x .

12. En las líneas 18 y 19, el ciclo `for` establece los valores del vector `t`.
13. En las líneas 20, 21, 22 y 23, el ciclo `for` establece los valores de la primera y última fila de la matriz `u`.
14. En las líneas 24, 25 y 26, el ciclo `for` establece los valores de la primera columna de la matriz `u` igual a `u0`.
15. En las líneas 27, 28, 29 y 30, el ciclo `for` establece los valores de la segunda columna del arreglo `u` igual a $(dt) * (u1(x(i))) + u(i, 0)$.
16. En las líneas 31 al 37, se emplea el ciclo `for` para calcular los desplazamientos `u` en los puntos restantes por el método de diferencias finitas

$$u(i, j+1) = ((2+dt) * u(i, j) + (s^2) * (u(i+1, j) - 2 * u(i, j) + u(i, j-1)) - u(i, j-1)) / (1+dt);$$

17. En las líneas 38 al 45, se emplea la estructura de repetición `for` para obtener los desplazamientos de la membrana en el intervalo de tiempo $[0, T]$ con un tamaño de paso `dt`
El string `fn` almacena los datos del desplazamiento en los archivos `resulj.txt`.
La orden `ofstream`, declara el archivo de salida `fn`. En las líneas 41 al 44 se utiliza la estructura `for` para almacenar los valores de `x` y `u(x)` en el archivo `resulj.txt`.

4.4.1. Gráficas mediante Gnuplot

Con el código `disipacion1d.edp` se tienen los archivos de texto que contienen información de los valores de u en cada punto x y t de la malla. La visualización de las gráficas de la solución se realizarán con ayuda de Gnuplot. Cada archivo de datos

`resul0.txt, resul1.txt, resul2.txt, ..., resul100.txt,`

contiene en cada columna los valores de x y $u(x)$ que son generados por el programa anteriormente mencionado `disipacion1d.edp`.

Gnuplot batch mode nos permite obtener un gran número de figuras de manera rápida. Para ello, primero realizaremos la gráfica del archivo de datos `resul0.txt` mediante el archivo de datos `datos.plt`, el cual genera la gráfica `resul0.eps`. A continuación se muestra el archivo `datos.plt`.

```

1  set style data lines
2  set xrange [0:1]
3  set xlabel 'x'
4  set ylabel 'u(x,t)'
5  set grid
6  plot "/home/lilalisbeth/Escritorio/prueba_2d/resul0.txt"
7  set term postscript color
8  set output "/home/lilalisbeth/Escritorio/prueba_2d/resul0.eps"
9  replot

```

Luego, se muestra la ejecución del archivo `datos.plt` en la consola de Ubuntu

```
gnuplot> load "datos.plt"
```

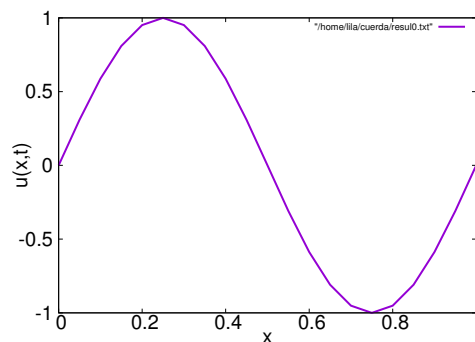


Figura 4.3: resul0.eps

Finalmente, se reutilizará el archivo `datos.plt` para obtener la gráficas de los archivos `resul1.txt`, ..., `resul100.txt`. Para ello reescribiremos los nombres de los archivos

`resul0.txt` y `resul0.eps`. El fichero shell script `script.sh` realiza esta operación mediante el comando UNIX `sed`.

Se muestra el código `script.sh`

```

1  #!/bin/bash
2  for i in *.txt ;
3  do sed "s/resul0/'echo \"$i\" | sed 's/\.txt$/\"'\`/g' datos.plt |
   gnuplot ;
4  done

```

Para cambiar el modo de acceso al archivo `script.sh`, ejecutamos la siguiente orden en la consola de Ubuntu

```
sudo chmod 777 script.sh
```


En el terminal ejecutamos el archivo `script.sh` el cual genera las gráficas de la solución aproximada

```
./script.sh
```

4.5. Resultados Numéricos

Se considera una cuerda elástica, isotrópica y homogénea de longitud $L = 1$ estirada firmemente en los extremos, con una fuerza de disipación externa lineal

$$g(u_t) = u_t.$$

El desplazamiento inicial de la cuerda es

$$u_0(x) = \sin(2\pi x) \tag{4.20}$$

y la velocidad inicial de la cuerda es

$$u_1(x) = 0. \tag{4.21}$$

A continuación se pueden observar los resultados obtenidos en FreeFem++. Se muestra la vibraciones de la cuerda con el desplazamiento inicial dado por (4.20) y la velocidad inicial (4.21). Las figuras 4.4 y 4.5 muestran la evolución de la aproximación de la solución $u(x, t)$ para los tiempos $t \in \{0s, 0,12s, 0,24s, 0,4s, 0,68s, 0,76s\}$.

En las figuras podemos ver el efecto de la disipación g en la cuerda elástica con extremos fijos.

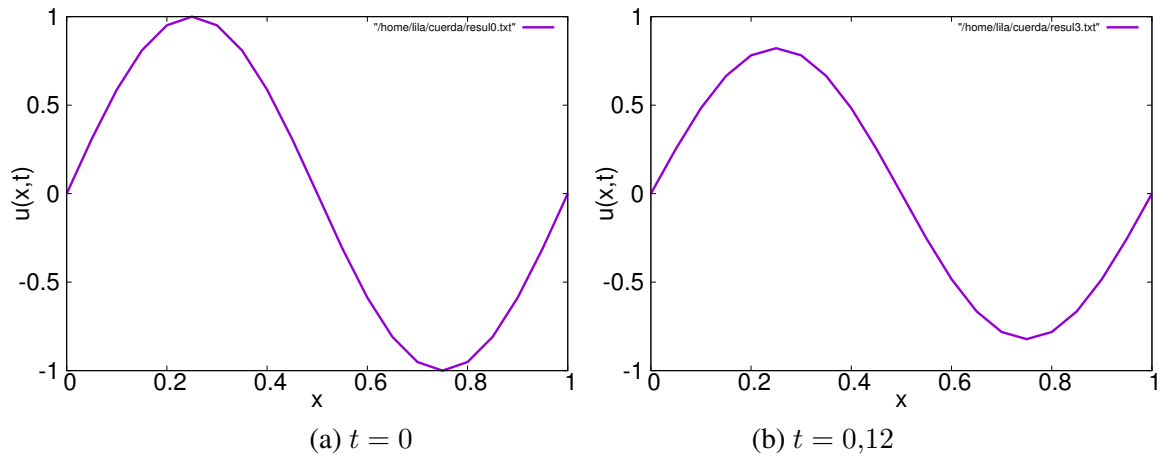


Figura 4.4: Aproximación de $u(x,t)$ usando el método de diferencias finitas en FreeFem++ con $\Delta t = 0.04$ y $\Delta x = 0.05$.

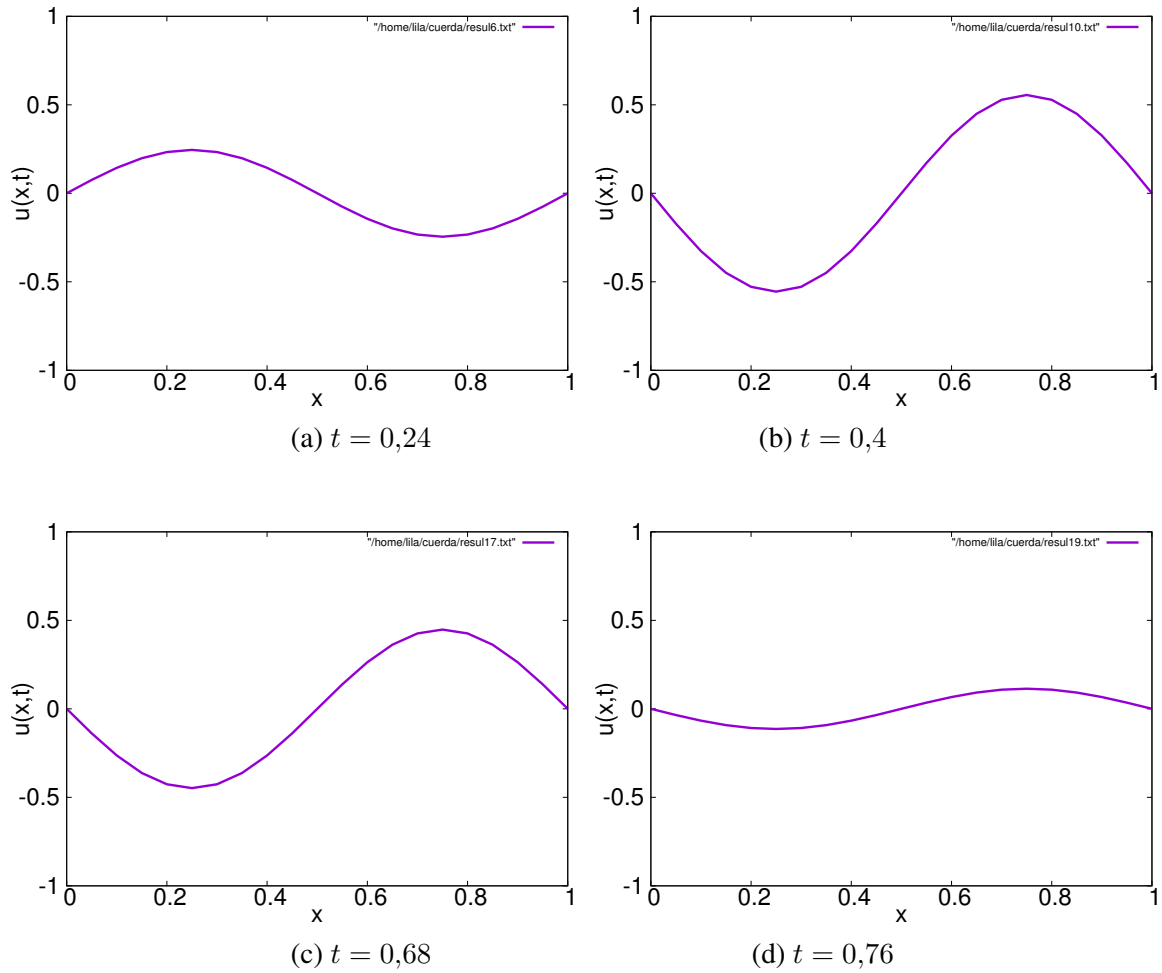


Figura 4.5: Aproximación de $u(x,t)$ usando el método de diferencias finitas en FreeFem++ con $\Delta t = 0.04$ y $\Delta x = 0.05$.

Capítulo 5

Implementación computacional de la membrana vibrante en FreeFem++

En este capítulo realizamos el estudio del método numérico que utilizamos con la finalidad de simular el desplazamiento de una membrana con frontera fija sujeta a una fuerza de disipación no lineal. En la primera parte, presentamos el método de los elementos finitos que es la técnica empleada para aproximar soluciones de ecuaciones en derivadas parciales. En la segunda parte del capítulo, obtenemos la formulación variacional para el problema discreto, para ello encontramos la formulación variacional del problema continuo y realizamos una discretización de la variable tiempo t y aplicamos el método de los elementos finitos para la discretización de la variable espacial en \mathbb{R}^2 . En la tercera parte, implementamos en FreeFem++ el código para resolver el problema discretizado. Estudiaremos línea por línea el código con el objetivo de estudiar la sintaxis en FreeFem++. Finalmente, analizamos los resultados numéricos obtenidos.

Con el objetivo de implementación del método de los elementos finitos en FreeFem++ es necesario obtener la formulación variacional del problema.

5.1. Formulación variacional

Las vibraciones de la membrana elástica se describen mediante la siguiente ecuación en dos dimensiones

$$u_{tt} - \Delta u + g(u_t) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, t \geq 0, \quad (5.1)$$

donde g es el término disipativo no lineal. Consideramos el dominio

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)\}, \quad (5.2)$$

que es un conjunto abierto y limitado en \mathbb{R}^2 con frontera $\Gamma = \partial\Omega$.

Consideramos las siguientes condiciones iniciales para el desplazamiento y velocidad. Además adicionamos la condición de frontera la membrana tiene bordes fijos

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (5.3)$$

$$u_t(x, y, 0) = u_1(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (5.4)$$

$$u(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad t \geq 0. \quad (5.5)$$

Para deducir la formulación variacional o débil para el problema (5.1), multiplicamos ambos lados de la igualdad en (5.1) por la función de prueba $v \in H_0^1(\Omega)$, luego integramos sobre el dominio en ambos lados

$$\int_{\Omega} u_{tt} v dx dy - \int_{\Omega} \Delta u v dx dy + \int_{\Omega} g(u_t) v dx dy = 0.$$

Por el Teorema de Green (ver Teorema (1.6.5)),

$$\int_{\Omega} u_{tt} v dx dy - \left(\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \right) + \int_{\Omega} g(u_t) v dx dy = 0.$$

Como $v \in H_0^1(\Omega)$, se tiene que $v = 0$, para todo $(x, y) \in \partial\Omega$ entonces,

$$\int_{\Omega} u_{tt} v dx dy + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} g(u_t) v dx dy = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (5.6)$$

La ecuación (5.6) es llamada formulación variacional de (5.1).

Observamos que esta formulación no es posible insertarla directamente en FreeFem++, debido a que la variable tiempo t es continua. Por esta razón realizamos la discretización en t y para ello empleamos diferencias finitas (ver (1.22)) y (1.20))

$$u_{tt} = \frac{u(x, y, t + \Delta t) - 2u(x, y, t) + u(x, y, t - \Delta t)}{(\Delta t)^2} + O((\Delta t)^2)$$

y

$$u_t = \frac{u(x, y, t) - u(x, y, t - \Delta t)}{\Delta t} + O(\Delta t).$$

Dados $N \in \mathbb{N}$, consideremos una partición uniforme de $[0, T]$ en N subintervalos de tamaño $\Delta t = T/N$.

Para cada $n = 0, \dots, N$, sea $u^n(x, y)$ el valor de u calculado en el punto $(x, y) \in \Omega$ en el instante $n\Delta t$

$$u_{tt} = \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{(\Delta t)^2} \quad (5.7)$$

y

$$u_t = \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}. \quad (5.8)$$

Luego, reemplazando (5.7) y (5.8) en (5.6), se tiene el problema de encontrar $u^{n+1} \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\frac{1}{(\Delta t)^2} \int_{\Omega} (u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}) v dx dy + \int_{\Omega} \nabla u^{n+1} \nabla v + \int_{\Omega} g \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} \right) v dx dy = 0, \quad (5.9)$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

5.2. Método de los elementos finitos

El método de los elementos finitos (MEF) es un método numérico elegido para el cálculo de soluciones de problemas de valores de fronteras elípticos, parabólicos e hiperbólicos debido a que muchas veces es difícil encontrar la solución exacta. La idea básica de este método es reemplazar el espacio de Hilbert H sobre el cual planteamos la formulación variacional por un espacio de dimensión finita V_h . Este nuevo problema discreto planteado sobre V_h se reduce a la solución de un sistema lineal. Históricamente, las primeras premisas del método de elementos finitos han sido propuestas por el matemático Richard Courant (1943), más tarde en los años 1950 y 1960 ingenieros mecánicos que desarrollaron, popularizaron y probaron la eficiencia de este método.

A diferencia del resto de métodos numéricos existentes tales como el método de diferencias finitas expuesto anteriormente, este método ayuda a resolver problemas que envuelven dominios con geometría más compleja por ejemplo con frontera irregular. Otra ventaja del método MEF respecto a MDF es que trata la no linealidad de una forma sencilla y está basado en un desarrollo matemático más robusto.

El método de los elementos finitos es el método de Galerkin caracterizado por tres aspectos básicos: división del dominio Ω de la solución en un número finito de subdominios llamados *elementos finitos*, construcción del subespacio finito dimensional conformado por polinomios y la existencia de funciones base.

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio con frontera poligonal (formada por unión finita de segmentos de recta) abierto, limitado y conexo. El dominio $\bar{\Omega}$ se divide en n_t elementos triangulares $T_k, k = 1, \dots, n_t$. La familia de triángulos T_k forma una triangulación \mathcal{T}_h indexada por el parámetro positivo h que denota el diámetro de los triángulos, es decir, la longitud del mayor lado de todos los triángulos. Definimos el conjunto

cerrado

$$\Omega_h = \bar{\Omega} = \bigcup_{T_k \in \mathcal{T}_h} T_k. \quad (5.10)$$

La construcción de la triangulación debe cumplir las siguientes propiedades:

- (a) Cada triángulo tiene interior no nulo.
- (b) Dos triángulos vecinos pueden tener en común un vértice o un lado completo.
- (c) Las esquinas de Ω deben ser los vértices de los triángulos.

La figura 5.1 muestra un ejemplo admisible y no admisible de triangulaciones en el MEF.

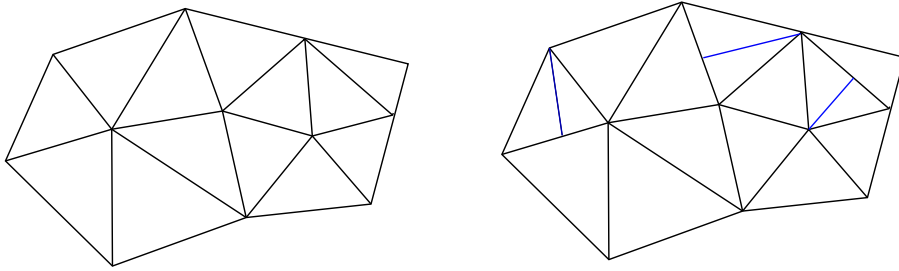


Figura 5.1: El lado izquierdo muestra una triangulación permitida. Por otro lado, el lado derecho es una triangulación no permitida pues la línea azul define un vértice que ocurre en el lado de otro elemento.

2. El segundo aspecto del método de los elementos finitos consiste en construir espacios vectoriales de dimensión finita $V_h \subset H_0^1$, de esta forma pasamos la formulación variacional continua a discreta.

Consideramos como espacio de aproximación el espacio de las funciones continuas en el dominio Ω_h cuyas restricciones sobre cada triángulo $T_k \in \mathcal{T}_h$ son polinomios lineales, es decir

$$H_h = \{v \in C^0(\Omega_h) : \forall T_k \in \mathcal{T}_h, \quad v|_{T_k} \in \mathbb{P}^1(T_k)\} \quad (5.11)$$

El espacio de las funciones pruebas $H_0^1(\Omega)$ será reemplazado por el espacio de dimensión finita cuyas funciones se anulan en la frontera de Ω_h , el cual es dado por:

$$V_h = \{v \in H_h : v|_{\partial\Omega_h} = 0\}. \quad (5.12)$$

El cual es denominado espacio de los elementos finitos de grado 1.

El siguiente resultado nos muestra como caracterizar las funciones $\varphi \in H_h$.

Proposición 5.2.1. *Las funciones φ de H_h están completamente determinadas por sus valores en los vértices de la triangulación.*

Demostración. En efecto, considere el triángulo T_k definido por las coordenadas de sus vértices $q^0 = (q^{0x}, q^{0y})$, $q^1 = (q^{1x}, q^{1y})$ y $q^2 = (q^{2x}, q^{2y}) \in \mathbb{R}^2$ y los valores $\varphi^i = \varphi(q^i)$, $i = 0, 1, 2$. Por definición φ es lineal en el triángulo T_k , por lo que es escrito de la forma

$$\varphi(x) = ax + by + c, \quad \forall x \in T_k, \quad (5.13)$$

donde a, b y $c \in \mathbb{R}$. Las constantes a, b, c son determinadas utilizando los vértices del triángulo

$$\begin{aligned} \varphi(q^0) &= aq^{0x} + bq^{0y} + c = \varphi^0 \\ \varphi(q^1) &= aq^{1x} + bq^{1y} + c = \varphi^1 \\ \varphi(q^2) &= aq^{2x} + bq^{2y} + c = \varphi^2. \end{aligned}$$

Este conjunto de ecuaciones puede escribirse como el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} q^{0x} & q^{0y} & 1 \\ q^{1x} & q^{1y} & 1 \\ q^{2x} & q^{2y} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix},$$

que tiene una única solución si y solo si el determinante es diferente de cero. Observamos que el determinante del sistema es igual a $2|T_k|$, donde $|T_k|$ es el área del triángulo T_k . \square

Tenemos dos consecuencias importantes de la proposición..

- La primera indica la continuidad de las funciones $\varphi \in \mathbb{P}^1$ en el lado común $[q^i, q^j]$ (segmento de extremos q^i y q^j) entre dos triángulos.

En efecto, si $x \in [q^i, q^j]$, podemos escribir

$$x = \lambda q^i + (1 - \lambda)q^j,$$

entonces

$$\varphi(x) = \lambda\varphi(q^i) + (1 - \lambda)\varphi(q^j),$$

y esta relación es válida para ambos triángulos.

- La segunda consecuencia es el grado de libertad (es decir, los parámetros que permiten identificar de manera única una función en \mathbb{P}^1 . Observamos que para funciones en \mathbb{P}^1 el grado de libertad para cada elemento T_k es 3. La figura 5.2 muestra el número de grados de libertad (puntos de color rojo) para el espacio de polinomios lineales, cuadráticos y cúbicos

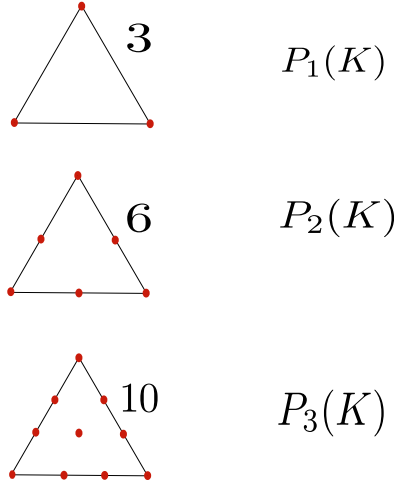


Figura 5.2: Diferentes grados de libertad para la representación discreta de funciones \mathbb{P}^1 , \mathbb{P}^2 y \mathbb{P}^3 en cada triángulo T_k .

Observación: En la práctica, nunca usamos la expresión (5.13) para la función $\varphi \in \mathbb{P}^1$, en vez de eso usamos la expresión en coordenadas baricéntricas.

Definición 5.2.1. Las coordenadas baricéntricas de un punto $x \in \mathbb{R}^2$, con respecto al triángulo T_k de vértices q^0, q^1 y $q^2 \in \mathbb{R}^2$ son los números reales $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$ solución única del sistema:

$$x = \lambda_0 q^0 + \lambda_1 q^1 + \lambda_2 q^2 \quad (5.14)$$

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad (5.15)$$

Las coordenadas baricéntricas son las funciones $\lambda_i(x)$ que satisfacen $\lambda_i(q^j) = \delta_{ij}$. Desde un punto de vista práctico las coordenadas baricéntricas nos permite:

- Dado cualquier $x \in \mathbb{R}^2$, verificar si x está en el triángulo T_k .
En efecto, podemos calcular las coordenadas baricéntricas de x con respecto al triángulo T_k resolviendo el sistema (5.14). Si la solución $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$ satisface $0 \leq \lambda_i \leq 1, \forall i = 0, 1, 2$, entonces el punto x pertenece al triángulo T_k .
- Definir una función $\varphi \in \mathbb{P}^1(T_k)$ por la expresión obtenida directamente de (5.14)

$$\varphi(x) = \lambda_0 \varphi(q^0) + \lambda_1 \varphi(q^1) + \lambda_2 \varphi(q^2). \quad (5.16)$$

3. El tercer aspecto básico del método de los elementos finitos es relacionado a la existencia de una base del espacio finito dimensional V_h .

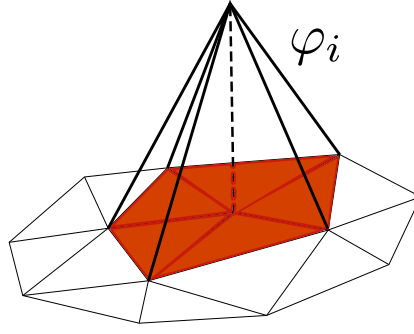


Figura 5.3: Función base

Proposición 5.2.2. *La dimensión del espacio H_h es igual al número de vértices n_v de la triangulación.*

Como la dimensión del espacio H_h es n_v es natural elegir como base de H_h las funciones w^i , $i = 1, \dots, n_v$ tal que

$$\omega^i \in H_h, \quad \omega^i(q^j) = \delta_{ij} \text{ índice de Kronecker} \quad (5.17)$$

Estas funciones ω^i son denominadas funciones sombrero debido a su formato piramidal como se ve en la Figura 5.3. Por lo tanto, para todo $v_h \in H_h$ es de la forma $v_h = \sum_{i=1}^{n_v} v_h(q^i) w^i(x)$.

Los escalares $v_h(q^i)$ son los grados de libertad de la función v_h .

Observamos que a partir de (5.16) y (5.17) podemos establecer una relación directa entre las funciones base de H_h y las coordenadas baricéntricas en el triángulo T_k , es decir

$$\omega^i(x) = \lambda_i(x), \quad \forall x \in T_k, i = 0, 1, 2, \dots$$

Que podemos decir del espacio V_h ? El número de grados de libertad para la representación de una función $v \in V_h$ está restringida por la condición $v|_{\Gamma} = 0$ y por lo tanto la dimensión de V_h es $n_v - n_d$, donde n_d es el número de vértices de la triangulación en la frontera Γ . Así, una base de V_h está formada por las funciones sombrero definida en todos los puntos de la triangulación excepto los puntos que pertenecen a la frontera.

5.3. Formulación variacional discreta

Con los espacios de aproximación introducidos anteriormente, la formulación variacional (5.9) viene a ser. Encontrar $u_h^{n+1}(x) \in V_h$ tal que

$$\frac{1}{(\Delta t)^2} \int_{\Omega_h} (u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}) v dx dy + \int_{\Omega_h} \nabla u_h^{n+1} \nabla v + \int_{\Omega_h} g \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t} \right) v dx dy = 0, \quad (5.18)$$

para todo $v \in V_h$.

Tenemos que $u_h^{n+1}(q^i) = 0, \forall q^i \in \Gamma$. Si I denota el conjunto de índices de los vértices que no pertenecen a la frontera. Luego, la solución $u_h \in V_h$ es expresada en relación a las funciones base

$$u_h^n(x) = \sum_{i \in I} u_i^n \omega^i(x), \forall n,$$

donde $u_i^n = u_h^n(q^i)$. Como la ecuación (5.18) se verifica para todo $v \in V_h$. Tomamos $v = \omega^j, j \in I$ y obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \frac{1}{(\Delta t)^2} (u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}) \int_{\Omega_h} \omega^i \omega^j dx dy \sum_{i \in I} u_i^{n+1} \int_{\Omega_h} \nabla \omega^i \omega^j \\ + \int_{\Omega_h} g \left(\frac{1}{\Delta t} \sum_{i \in I} (u_i^n - u_i^{n-1}) \omega^i \right) \omega^j dx dy = 0, \forall j \in I, \end{aligned}$$

lo cual nos permite calcular las $n_v - n_d$ incógnitas $u_i^{n+1}, i \in I$.

5.4. La Solución numérica mediante FreeFem++

Para calcular la solución aproximada de la ecuación que modela el movimiento de la membrana, primero escribiremos un programa en FreeFem++, segundo visualizaremos las gráficas a través del programa Gnuplot y finalmente el archivo batch mode nos permitirá obtener una salida simultánea de las gráficas de la solución.

La solución del problema (2.1) mediante el método de los elementos finitos (MEF) se realizará con el código disipacion2d.edp implementado en FreeFem++.

A continuación explicaremos el código disipacion2d.edp.

```
1  real T=1; // declaracion y definicion del tiempo final
2  int M=1000; // declaracion y definicion del numero de
   particiones de t
3  real dt=T/M;
4  real cpu=clock(); // tiempo de ejecucion
5  string fn; //cadena de caracteres
```

```

6  mesh Th=square(10,10); //malla cuadrada
7  savemesh(Th,"malla.msh");
8  func real g(real z)// declaracion y definicion del termino
   disipativo
9  {return atan(z);
10 }
11 fespace Vh(Th,P1); // declaracion de los espacios de funciones
12 Vh u,up,upp,v,uu; // declaracion de variables, funciones base y
   de prueba
13 problem onda(u,v)=int2d(Th) (u*v/(dt^2)+dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v)
   )
14   +int2d(Th) ((upp*v-2*up*v)/(dt^2)+ g((up-upp)/(dt))*v)
15   +on(1,2,3,4,u=0);
16 func u0=20*x*y*(1-x^2)*(1-y^2); //condicion inicial de u en t=0
17 func u1=0; //condicion inicial de ut en t=0
18 uu=u0;
19 u=u0+(dt)*u1;
20 ofstream uf0("disip0.txt");
21 for (int i=0;i<Th.nt;i++)
22   {for(int j=0;j<3;j++)
23     {uf0<<Th[i][j].x<<" "<<Th[i][j].y<<" "<<uu[][Vh(i,j)]<<
       endl;}
24     uf0<<Th[i][0].x<<" "<<Th[i][0].y<<" "<<uu[][Vh(i,0)]<<"\n
       \n\n";
25   }
26 plot(uu,value=1,fill=1);
27 ofstream uf1("disip1.txt");
28 for (int i=0;i<Th.nt;i++)
29   {for(int j=0;j<3;j++)
30     {uf1<<Th[i][j].x<<" "<<Th[i][j].y<<" "<<u[][Vh(i,j)]<<endl
       ;}
31     uf1<<Th[i][0].x<<" "<<Th[i][0].y<<" "<<u[][Vh(i,0)]<<"\n
       n\n";
32   }
33 plot(u,value=1,fill=1);
34 for(int t=2;t<=M;t++)
35   {upp=uu;
36   up=u;
37   fn="disip"+t+".txt";
38   onda;
39   ofstream uf(fn);
40   for (int i=0;i<Th.nt;i++)
41     {for(int j=0;j<3;j++)
42       {uf<<Th[i][j].x<<" "<<Th[i][j].y<<" "<<u[][Vh(i,j)]<<
         endl;}
43       uf<<Th[i][0].x<<" "<<Th[i][0].y<<" "<<u[][Vh(i,0)]<<"\n
         n\n\n";
44     }
45   uu=up;

```

```

46 plot (u, value=1, fill=1) ;
47 }

```

Explicaremos detalladamente línea por línea como FreeFem++ ejecuta cada instrucción

1. En la primera línea se declara la variable de tipo real: tiempo final T igual a 1.
2. En la segunda línea se declara la variable de tipo entero: número de particiones del tiempo M .
3. En la tercera línea se declara la variable de tipo real: tamaño de paso dt igual a T/M .
4. En la cuarta línea se calcula el tiempo de ejecución en segundos el cual se almacena en la variable real `cpu`.
5. En la quinta línea se crea el objeto `string fn` el cual va a almacenar una cadena de caracteres.
6. En la sexta línea, la triangulación \mathcal{T}_h de Ω es automáticamente generada por la orden `square(10,10)`, el cual genera una malla uniforme de $\bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1]$ utilizando 10 nodos en cada lado y por defecto la numeración de los lados es 1, 2, 3, 4, comenzando por la base y en sentido contrario a las agujas del reloj.
7. En la séptima línea, la orden `savemesh` guarda la triangulación \mathcal{T}_h en el archivo llamado `mallamsh` la cual es estructurada en el siguiente cuadro 5.1 donde n_v denota el número de vértices, n_t el número de triángulos y n_s el número de aristas en la frontera.

Cada triángulo T_k , $k = 1, \dots, n_t$, está conformado por tres vértices los cuales se orientan en sentido contrario al giro del reloj. En la Figura 5.4 se muestra una malla cuadrada unitaria uniforme indicando la enumeración de los elementos (color negro) y los vértices (color azul). El cuadro 5.1 complementa la Figura 5.4 mostrando la enumeración local de los vértices, triángulos y aristas.

El formato del archivo de triangulación generado por `mallamsh` es el siguiente:

- a) número de vértices, triángulos y aristas de la frontera.

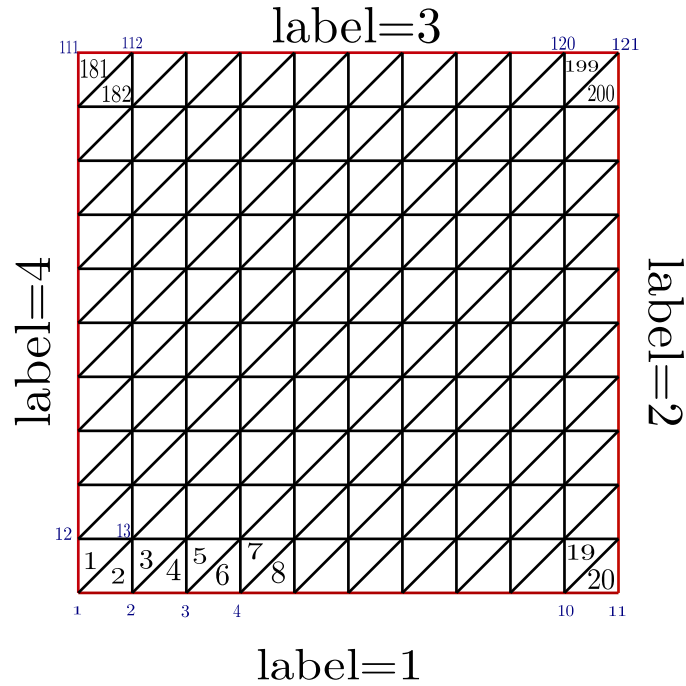


Figura 5.4: Triangulación uniforme del cuadrado unitario con enumeración de los triángulos, vértices y frontera.

- b) una línea que describe para cada vértice con sus coordenadas (x, y) y la etiqueta label. Por convención las fronteras tienen la etiqueta label un número lógico positivo, mientras que los vértices internos tienen la etiqueta label=0.
 - c) una línea que describe para cada triángulo con los tres vértices y su etiqueta label.
 - d) una línea que describe cada línea de la frontera con los números de los vértices y la etiqueta label.
8. En la líneas 8, 9, 10 se define la función $g(x)$ mediante la orden `func`.
 9. En la onceava línea, la orden `fespace Vh(Th, P1)` construye el espacio de dimensión finita V_h , Th hace referencia a la malla y $P1$ indica polinomios lineales para la discretización por elementos finitos. Además `FreeFem++` proporciona diversos tipos de elementos finitos en dos dimensiones:
 - P0 constante por partes
 - P1 continua y lineal por partes
 - P2 continua y cuadrática por partes
 - RT0 Raviart-Thomas constante por partes
 - P1nc no conformes y lineales por partes

Contenido del archivo				Descripción
121	200	40		121 vértices, 200 triángulos, 40 aristas de la frontera
0	0	4		vértice 1, $x = 0, y = 0$, label=4
0.1	0	1		vértice 2, $x = 0,1, y = 0$, label=1
		\vdots		\vdots
1	1	3		vértice 121, $x = 1, y = 1$, label=3
1	2	13	0	triángulo 1 de vértices (1, 2, 13), label=0
1	13	12	0	triángulo 2 de vértices (1, 13, 12), label=0
		\vdots		\vdots
109	121	120	0	triángulo 200 de vértices (109, 121, 120), label=0
1	2	1		arista 1 de vértices (1, 2), label=1
2	3	1		arista 2 de vértices (2, 3), label=1
		\vdots		\vdots

Cuadro 5.1: La estructura de `mallamsh`

P1dc discontinuas y lineales por partes

P2dc discontinuas y cuadráticos por partes

10. En la doceava línea, la orden `Vh u, up, upp, v, uu` declaran `u, up, upp, v` y `uu` como funciones del espacio `Vh`.
11. En las líneas 13, 14 y 15, la orden `problem onda(u, v)` define la formulación variacional. El término `int2d(Th)` indica la integral en dos dimensiones en `Th` y `u` es la función incógnita, `v` es la función de prueba y `on` indica las condiciones de contorno.

Nota:

FreeFem++ implementa sólo la formulación variacional del problema. Tener en cuenta que en FreeFem++ es necesario especificar la parte bilineal, lineal y las condiciones de contorno.

12. En la línea 16 y 17, la orden `func` define una función de acuerdo a su expresión analítica de variables x e y .
13. En la línea 18, se declara `uu` igual al desplazamiento inicial `u0` se refiere al desplazamiento inicial de la membrana.
14. En la línea 19, se declara `u` igual al desplazamiento en el tiempo `dt`, `u0+dt*u1` derivado de aplicar diferencias finitas en el tiempo.

15. En las líneas 20 al 25, la orden `ofstream uf0("disip0.txt")`, almacena el desplazamiento inicial de la membrana
16. En la línea 26, la orden `plot` permite graficar el desplazamiento. El parámetro `value` gráfica las isolíneas de u y el parámetro `fill` llena de color entre los isovalores de u .
17. En la línea 27 al 32, la orden `ofstream uf1("disip0.txt")`, almacena el desplazamiento en el tiempo dt de la membrana
18. En la línea 33, al igual que la línea 23 grafica los isovalores de u en el tiempo dt .
19. En las líneas 34 al 47, se emplea la estructura de repetición `for` para obtener los desplazamientos de la membrana de $[0, T]$ con un tamaño de paso dt . Primero se asignan los valores uu y u a up y upp respectivamente.
El string `fn` almacena los datos del desplazamiento en los archivos `disipt.txt`.
La instrucción `onda` resuelve el problema.
La orden `ofstream`, declara el archivo de salida `fn`. En las líneas 40 al 44 se utiliza la estructura `for` para almacenar los valores de x , y y $u(x, y)$.
En la línea 45, se asignan los nuevos valores a uu .
En la línea 46, la orden `plot` se utiliza para la visualización del desplazamiento. El parámetro de `plot fill=1` llena de color los isovalores de u .

5.4.1. Gráficas mediante Gnuplot

La visualización de las gráficas de la solución aproximada se realizarán con Gnuplot. Es decir, se realizaran las gráficas de los archivos de datos

`disip0.txt, disip1.txt, disip2.txt, ..., disip1000.txt`

que contienen en cada columna los valores de x, y y $u(x, y)$ que son generados por el código anteriormente mencionado `disipacion2d.edp`.

Gnuplot batch mode nos permite obtener un gran número de figuras de manera rápida. Para ello, primero realizaremos la gráfica del archivo de datos `disip0.txt` mediante el archivo de datos `datos.plt`, el cual genera la gráfica `disip0.eps`.

A continuación, se muestra el archivo `datos.plt` que muestra y guarda el gráfico del desplazamiento inicial $u_0(x, y)$ y la gráfica se muestra en Figura (5.5).

```

1  set zrange[-0.25:0.45]
2  set hidden3d
3  set palette rgbformulae 33,13,10
4  splot "/home/lilalisbeth/Escritorio/prueba/disip0.txt" with
    lines palette
5  set terminal png
6  set output "/home/lilalisbeth/Escritorio/prueba/disip0.png"
7  replot

```

Luego, se muestra le ejecución del archivo `datos.plt` en la consola de Ubuntu.

```
gnuplot> datos.plt
```

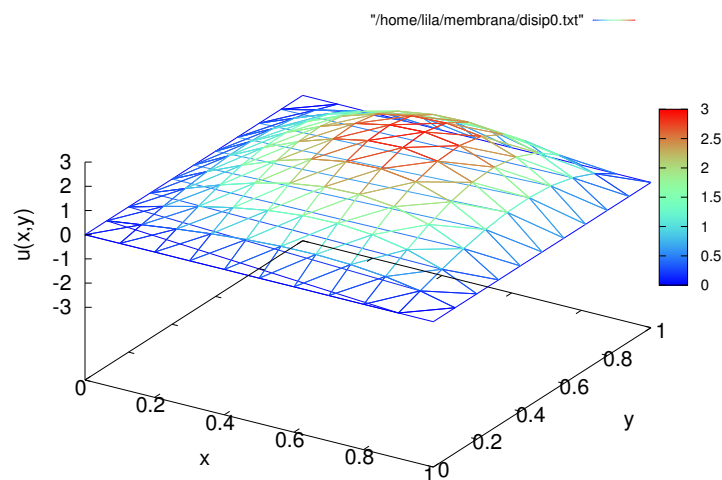


Figura 5.5: `disip0.eps`

Finalmente, se reutilizará el archivo `datos.plt` para realizar automáticamente las gráficas de los 1000 archivos `disip1.txt`, `disip2.txt`, ..., `disip1000.txt`. Para ello reescribiremos los nombres de los archivos `disip0.txt` y `disip0.eps`. El fichero script `script.sh` realiza esta operación mediante el comando UNIX `sed`.

Se muestra el archivo `script.sh`

```

1  #!/bin/bash
2  for i in *.txt ;
3  do sed "s/disip0/'echo \"$i\" | sed "s/\\.txt$/'"/g" datos.plt |
    gnuplot ;
4  done

```


Para cambiar el modo de acceso al archivo `script.sh`, ejecutamos la siguiente orden en la consola de Ubuntu

```
sudo chmod 777 script.sh
```

También ejecutamos el archivo `script.sh` el cual genera las gráficas de la solución aproximada

```
./script.sh
```

5.5. Resultados numéricos

Consideramos una membrana cuadrada elástica, isotrópica, homogénea y fijada a un marco cuadrado de longitud 1×1 . Supongamos que el desplazamiento es cero en el contorno del marco, esto es dado por las condiciones de contorno.

La forma inicial de la membrana en el instante $t = 0$ es dado por

$$u_0(x, y) = 20xy(1 - x^2)(1 - y^2), \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \quad (5.19)$$

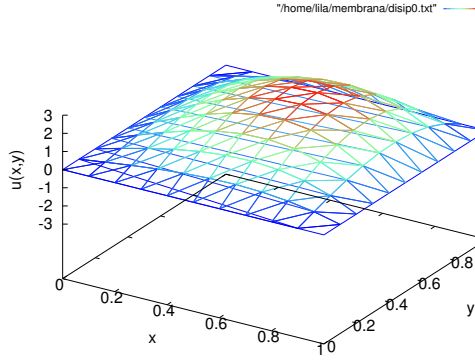
fija en los bordes, sin vibración inicial $u_1(x, y) = 0$ y lanzada en $t = 0$. Con una fuerza de disipación externa no lineal

$$g(u_t) = \arctan(u_t),$$

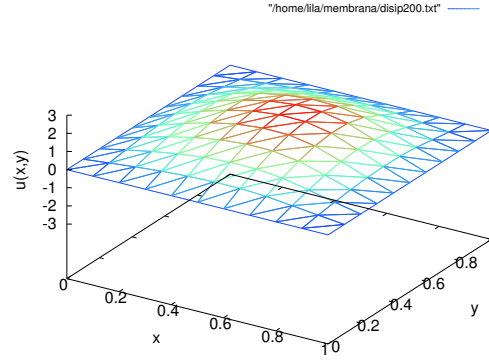
y la velocidad inicial de la membrana dado por

$$u_1(x, y) = 0. \quad (5.20)$$

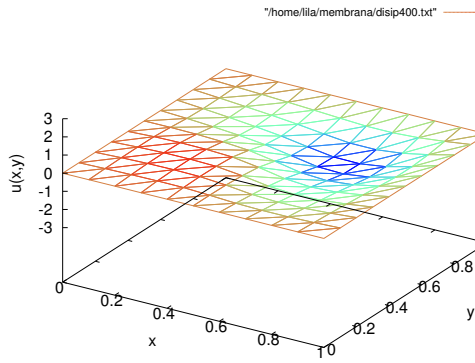
Se muestra la vibraciones de la membrana con el desplazamiento inicial dado por (5.19) y la velocidad inicial (5.20). La figura 5.6 muestra los desplazamientos de la membrana $u(x, y, t)$ para los diferentes instantes de tiempos $t \in \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$ respectivamente. De acuerdo a las figuras se observa que después de 0.2 segundos el desplazamiento disminuye y se aproxima a cero. El desplazamiento toma valores negativos después de 0.2 segundos. Luego de 0.8 segundos los desplazamientos negativos comienzan a disminuir. Finalmente, al tiempo final el desplazamiento de nuevo se acerca al valor 0. Los gráficos muestran el efecto de la fuerza $g(u_t)$ en la membrana lo que contribuye a reducir las amplitudes de onda de modo que el desplazamiento se reduce a lo largo de 1 segundo.



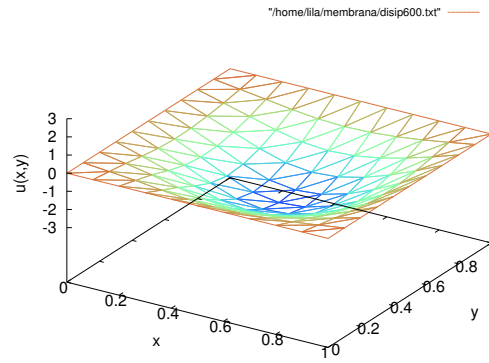
(a) $t = 0$



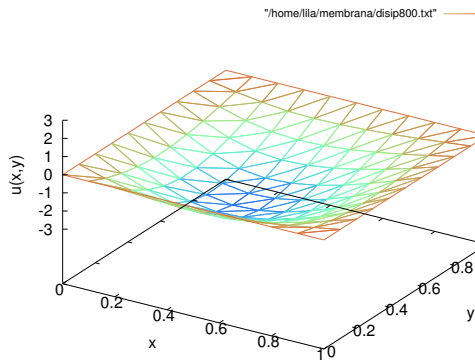
(b) $t = 0,2$



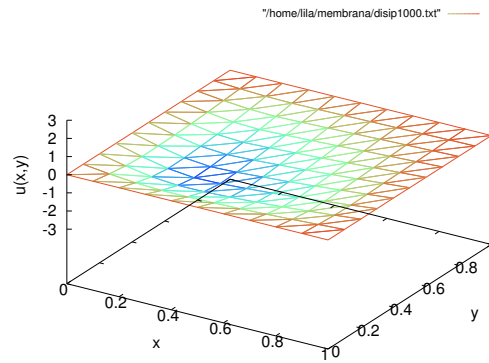
(c) $t = 0,4$



(d) $t = 0,6$



(e) $t = 0,8$



(f) $t = 1$

Figura 5.6: Aproximación de $u(x, y, t)$ usando métodos de elementos finitos en FreeFem++ con $\Delta t = 0,01$.

Conclusiones

El desarrollo de métodos numéricos para resolver ecuaciones en derivadas parciales viene avanzado con la finalidad de resolver nuevos problemas más complejos. Por lo tanto, la cantidad de softwares ha aumentado con el fin de abordar las necesidades de investigación de nuevos métodos y la simulación de problemas. Por ejemplo, hay varios softwares de elementos finitos disponibles para simular varias EDP's como FreeFem++, GetFEM++, GRINS, OpenFOAM, Gerris, Basilisk, etc..

FreeFem++ es un software gratuito, desarrollado por matemáticos e ingenieros franceses. Es un software escrito en lenguaje C++ que permite generar mallas y resolver problemas con dos o tres dimensiones espaciales mediante el métodos de los elementos finitos a través de código de programación. FreeFem++ ofrece un entorno agradable para resolución de los problemas permite una descripción del problema a partir de la formulación variacional y además de especificar las condiciones de contorno. Una desventaja de este software radica en la visualización de las soluciones, por tanto hacemos uso de Gnuplot también libre.

Este trabajo es desarrollado en dos etapas: primero estudiamos y desarrollamos el fundamento teórico de que garantiza la existencia, unicidad y regularidad de las soluciones de la la ecuación de onda con término disipativo no lineal utilizando la teoría de semi-grupos. La segunda parte realizamos la resolución numérica de la ecuación de onda con término disipativo no lineal tanto para el caso unidimensional y bidimensional de la variable espacial. En una primera instancia estudiamos el caso de la cuerda vibrante con fuerza de disipación lineal. Para el caso unidimensional, aplicamos el conocido método de diferencias finitas. También aprendemos a plantear y programar en FreeFem++. Las figuras presentadas muestran el efecto del término de disipación a lo largo del tiempo. En una segunda instancia realizamos la resolución numérica de la membrana vibrante. Introducimos la formulación variacional de la ecuación de onda. También introducimos y describimos el método de los elementos finitos para la discretización de la variable espacial y realizamos una semidiscretización para la variable temporal. En la resolución de

esta ecuación hemos considerado un dominio cuadrado con la finalidad del estudio ser de utilidad práctica. Cabe resaltar que este método puede trabajar con la no linealidad de la ecuación a diferencia del método de diferencias finitas. Finalmente, programamos línea por línea de código en FreeFem++ y con las figuras obtenidas vemos el efecto de la disipación en la membrana que se estabiliza en el tiempo.

Apéndice

Gnuplot

El programa Gnuplot es un programa de libre distribución, una herramienta gráfica orientada para Linux, Windows, OS/2 y otras plataformas. El cual puede descargarse de la página

<http://www.gnuplot.info/>

Fue creado originalmente para permitir a los estudiantes y científicos visualizar las funciones matemáticas así como los datos de forma interactiva. Fue actualizado para dar soporte a otros programas que necesitan de un visualizador de gráficos, como por ejemplo Octave. Gnuplot ha sido apoyado y en desarrollo activo desde 1986. La figura 7 muestra la captura de pantalla de Gnuplot.

Después de la inicialización de Gnuplot en el sistema operativo Linux, ver 7, podemos usar el por ejemplo el comando `plot` para graficar funciones en 2D

```
1 gnuplot> plot sin(x)
```

Este comando grafica la función trigonométrica $\sin(x)$ en un intervalo de x dado por defecto. También, podemos graficar varias funciones en una misma ventana

```
1 gnuplot> plot sin(x), cos(x), sqrt(x)
```

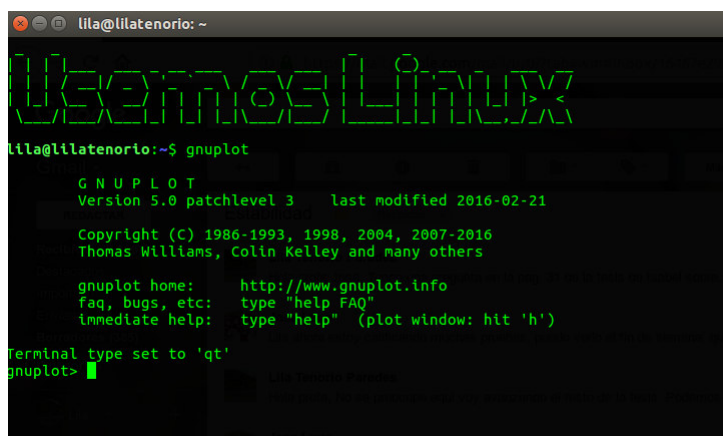


Figura 7: Programa Gnuplot

Una característica del Gnuplot es la facilidad para graficar de funciones en tres dimensiones. Usamos el comando `splot`.

```
1 gnuplot> splot x**2+y**2
```

El comando `help` proporciona ayuda en línea sobre el paquete. Además de realizar gráficos de funciones Gnuplot genera graficos a partir de un archivo de datos en formato de texto.

```
1 gnuplot> plot datos.txt
```

Bibliografía

- [1] ADAMS, R.A. and FOURNIER, J.J.F., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 2003.
- [2] ANG, D. D. and DINH, A. P. N., *Mixed problem for some semi-linear wave equation with a nonhomogeneous condition*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 12(6), 581-592, 1988.
- [3] AVERSON, W., *A Short Course on Spectral Theory*, Springer, New York, 2002.
- [4] BALL, J.M., *Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations*, The Quarterly Journal of Mathematics, 1977.
- [5] BARBU, V., *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Nordhoff, 1976.
- [6] BARTLE, R.G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Willey & Sons, New York, 1995.
- [7] BECKER, E.B., CAREY, G.F. and ODEN, J.T., *Finite Elements. An Introduction. Volumen I*, Prentice-Hall, New Jersey, 1981.
- [8] BRAUER, F. and NOHEL, J.A., *The qualitative theory of ordinary differential equations: an introduction*, Courier Corporation, 2012.
- [9] BRÉZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2011.
- [10] CAUCHY, A. L. B., *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique*, Debure, 1821.
- [11] CHACÓN, E., *Notas sobre Freefem++ 2D y 3D: Traducción del manual de F.Hecht*, <http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++Spanish.pdf>

- [12] DANAILA, I., HECHT, F. and PIRONNEAU, O., *La Simulation Numerique en C++*, Dunod, Paris, 2003.
- [13] DAVIS, T. A., *Umfpack version 4.1 user guide*, Department of Computer and Information Science and Engineering, University of Florida, 2003.
- [14] DRÁBEK, P. and HOLUBÁ, G., *Element of Partial Differerential Equations*, Walter de Gruyter GmbH & Co KG, Berlin, 2014.
- [15] FREY, P. J. and GEORGE P.L., *Mesh generation: application to finite elements*, ISTE, 2007.
- [16] GIANCOLI, D.C., *Physics for Scientist and Engineers with Modern Physics*, Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2009.
- [17] GOODWINE, B., *Engineering Differential Equations*, Springer, New York, 2011.
- [18] HARAUX, A., *Nonlinear Evolution Equations-Global Behaviour of Solutions*, Lectures Notes in Math, Springer, Germany, 1981.
- [19] HARAUX, A. and ZUAZUA, E., *Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 100(2), 191-206, 1988.
- [20] HECHT, F., PIRONNEAU, O. and OTHSUKA, K., *Freefem++:manual*, <http://freefem.org/>
- [21] JANERT, P.K., *Gnuplot in Action: Understanding data with graphs*, Manning, New York, 2009.
- [22] JOHNSON, C., *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*, Courier Corporation, 2012.
- [23] KEZAVAN, S., *Topics in Functional Analysis and Aplications*, John Wiley & Sons, New Delhi, 2003.
- [24] KOPACKOVA, M., *Remarks on bounded solutions of a semilinear dissipative hyperbolic equation*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 30(4), 713-719, 1989.
- [25] LUYO SÁNCHEZ, J.R., *Existence, Uniquess and Asymptotic behaviour of solutions of semilinear equations of the string (tesis de maestría)*, Universidade Federal de Rio de Janeiro, Brazil, 1998.

- [26] MEDEIROS, L.A., MELLO, E.A., *A Integral de Lebesgue*, Textos de Métodos Matemáticos, Rio de Janeiro, 1989.
- [27] MYINT-U, T. and DEBNATH, L., *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Birkhäuser, Boston, 2007.
- [28] MUÑOZ RIVERA, J.E., *Semigrupos e Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Pós-Graduação, Rio de Janeiro, 2004.
- [29] PAZY, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer Science & Business Media, New York, 2012.
- [30] PIRONNEAU, O. and PRUD'HOMME, C., *FreeFEM Documentation. A language for the finite element method*, <http://www.freefem.org/ff++/>
- [31] PIRONNEAU, O., *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, <http://www.ann.jussieu.fr/pironneau/infosci/coursWebGB.pdf>
- [32] POTTER, M.C., *Engineering Analysis*, Springer, 2018.
- [33] QUARTERONI, A. and VALLI, A., *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Springer, Berlin, 2008.
- [34] RAMMAHA, M., *The influence of damping and source terms on solutions of non-linear wave equations*, Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, 25(1-2), 77-90, 2007.
- [35] REDDY, J.N., *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-hill, New York, 2006.
- [36] RAO, S.S., *The Finite Element Method in Engineering*, Butterworth-heinemann, 2017.
- [37] SAAD, Y., SCHULTZ, M. H., *GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems*, SIAM Journal on scientific and statistical computing, 7(3), 856-869, 1986.
- [38] SALSA, S., *Partial Differential Equations in Action from Modelling to Theory*, Springer, 2016.
- [39] STRIKWERDA, J.C., *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, 2004.

- [40] THOMAS, J.W., *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Method*, Springer, New York, 1995.
- [41] TODOROVA, G., *Cauchy problem for a nonlinear wave equation with nonlinear damping and source terms*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 41(7-8), 891-905, 2000.
- [42] YOSIDA, K., *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [43] ZHENG, S., *Nonlinear evolution equations*, CRC Press, 2004.
- [44] ZUAZUA, E., *Exponential decay for the semilinear wave equation with localized damping in unbounded domains*, J. Math. Pures Appl, 70(4), 513-529, 1991.